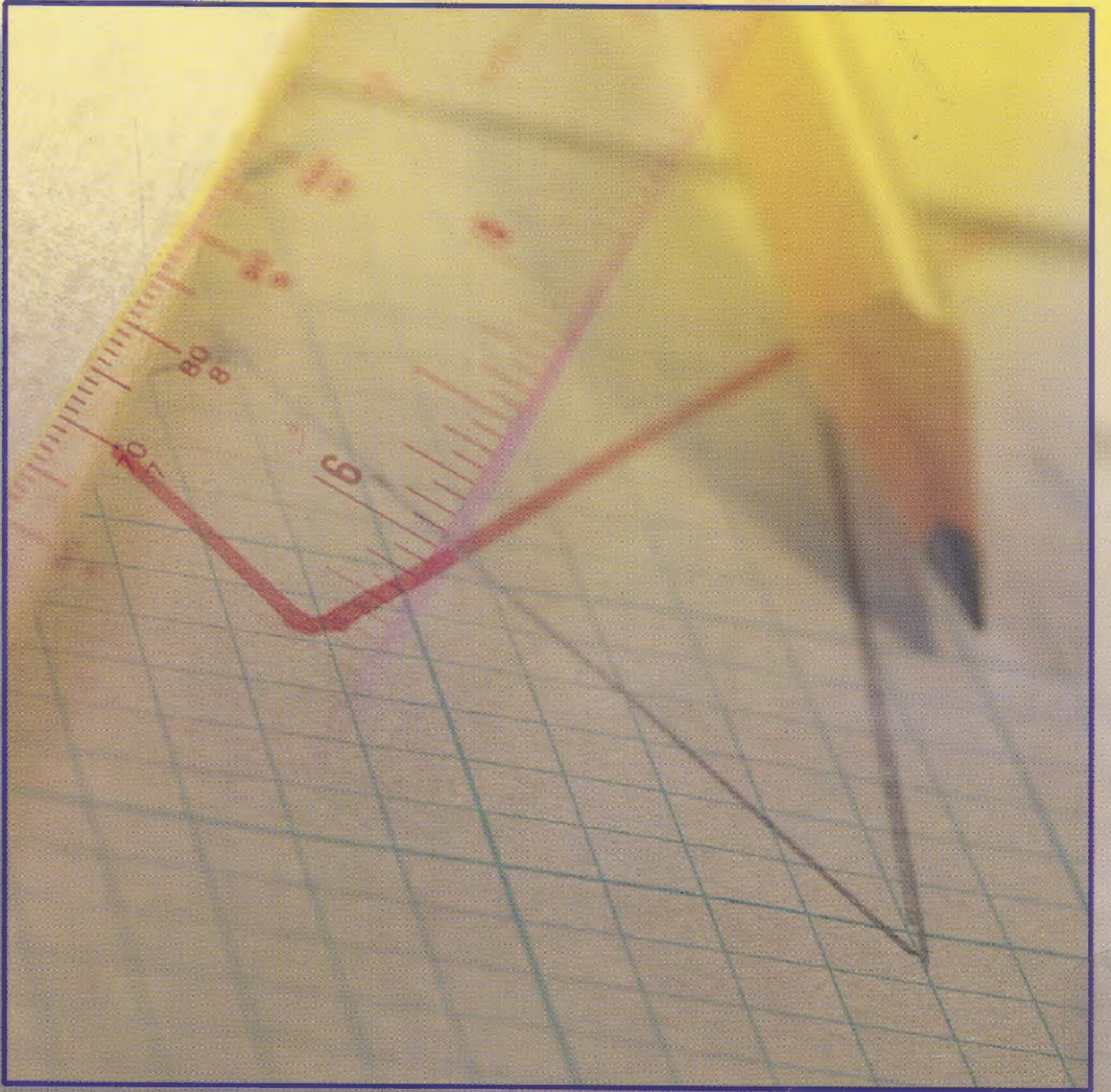


# هندسة التحويلات



لطلبة  
الجامعات  
والمعاهد  
العليا

تأليف

دكتور/ سامي محمد مصطفى

دكتور/ عبد الهادي محمود الإترى

قسم الرياضيات  
كلية التربية - جامعة عين شمس

الدار الدولية للاستثمارات الثقافية





# هندسة التحويلات

لطلبة الجامعات والمعاهد العليا

تأليف

دكتور / عبد الهادي محمود الاتربي      دكتور / سامي محمد مصطفى

قسم الرياضيات  
كلية التربية - جامعة عين شمس

الدار الدولية للاستثمارات الثقافية  
مصر

الطبعة الأولى

2000 م

هندسة التحويلات

تأليف

د. عبد الهادي الاتربي

رقم الإيداع

2000/3150

I.S.B.N

977-282-077-3

لا يجوز نشر أى جزء من هذا الكتاب أو اختزان مادته بطريقة الاسترجاع أو نقله على أى نحو أو بأى طريقة سواء أكانت إلكترونية أو ميكانيكية أو خلاف ذلك إلا بموافقة الناشر على هذا كتابة ومقدماتاً .

حقوق الطبع والاقتباس

والترجمة والنشر محفوظة

لدار الدولية للاستثمارات الثقافية ش.م.م.

8 إبراهيم الصرابي - النزهة الجديدة - مصر الجديدة - القاهرة - ج.م.ع.

ص.ب: 5599 هليوبوليس غرب / القاهرة - تليفون: 2957655/2972344 فاكس : 2957655 (00202)

# المحتويات

٧	المقدمة
٩	الباب الأول: مفاهيم أساسية
١٦	٢-١ المفهوم العام للعلاقة
١٧	١-٢-١ علاقة التكافؤ
٢٠	٣-١ مفهوم الراسم
٢٢	١-٣-١ تحصيل الرواسم
٢٦	٤-١ الزمرة
٣٠	٥-١ الفراغ الاتجاهى ثنائى البعد
٣٤	٦-١ القطعة المستقيمة الموجهة
٣٩	٧-١ التحويلة الهندسية
٤١	٨-١ مصفوفة التحويل
٤٧	٩-١ الزاوية الموجهة
٥١	١٠-١ التمويل المباشرة والمضادة
٥٢	١١-١ التساوى والقياس
٥٣	تمارين عامة
٥٩	الباب الثانى : الانعكاس
٥٩	١-٢ صورة النقطة بالانعكاس

٧٨	٢-٢ خواص الانعكاس
٨٢	٣-٢ مصفوفة الانعكاس
٩٥	تمارين عامة
٩٩	<b>الباب الثالث : الدوران</b>
٩٩	١-٣ صورة النقطة بالدوران
١٠٠	٢-٣ نصف الدورة
١١٢	٣-٣ خواص الدوران
١٢٥	٤-٣ مصفوفة الدوران
١٣٥	تمارين عامة
١٤١	<b>الباب الرابع : الانتقال</b>
١٤١	١-٤ صورة النقطة بالانتقال
١٤٢	٢-٤ خواص الانتقال
١٦١	٣-٤ مصفوفة الانتقال
١٦٥	تمارين عامة
١٦٩	<b>الباب الخامس : الانعكاس الانزلاقي ووحدة التساويات القياسية</b>
١٦٩	١-٥ صورة النقطة بالانعكاس الانزلاقي
١٧٢	٢-٥ خواص الانعكاس الانزلاقي
١٧٦	٣-٥ وحدة التساويات القياسية
١٩٥	تمارين عامة

الباب السادس: التشابه	٢٠١
١-٦ مفهوم التشابه	٢٠١
٢-٦ التكبير	٢٠٦
٣-٦ خواص التشابه	٢١٩
٤-٦ أمثلة متنوعة	٢٢٠
تمارين عامة	٢٢٣





# مقدمة

إن تقديمنا لهذا الكتاب يهدف فى المقام الأول إلى تعريف الطالب لغة "هندسة التحويلات" ودراستها كتركيب رياضى أو كنظام من أنظمة المسلمات . ونهدف فى المقام الثانى إلى أن يكون هذا الكتاب نقطة انطلاق لكتب أكثر تعمقاً وأكثر تخصصاً لتغطية العديد من أفرع الرياضيات المستحدثة والتي يجب أن توجد فى المكتبة العربية حتى نواكب ركب الحضارة والعلوم الحديثة ، ونشرى تلك المكتبة بالمراجع العلمية . ونهدف أخيراً إلى أن يكون هذا الكتاب مرجعاً للسنوات الجامعية الأولى والمعاهد العليا .

وقد حاولنا بقدر الإمكان أن تكون أبواب الكتاب متناسقة حتى تكون عملية القراءة مريحة ومثمرة . وحرصنا أيضاً على أن يكون الكتاب مجالاً لتوجيه الدارس نحو التفكير والمعرفة ، فالمعرفة باب العلم ، والعلم وسيلة التفوق والسيادة.

ونأمل بذلك أن نكون قد ساهمنا فى ملء الفراغ الذى يحس به قراء العربية فى هذا المجال . كما نأمل أن نعيد إلى ذهن العالم سيرة أجدادنا الذين قادوا الحضارة العالمية بما حملوه من مشاعل النور والعلم والمعرفة.

**والله الموفق والمعين**

**المؤلفان**







# الباب الأول

## مفاهيم أساسية

### ١-١: مفهوم المجموعة

المجموعة لفظ يطلق على أى تجمع من الأشياء المدركة حسياً أو بديها ،على أن تكون هذه الاشياء متميزة ومحددة تحديداً تاماً . والاشياء المكونة للمجموعة تسمى عناصر المجموعة.

عادة يرمز للمجموعات بالرمز  $S$ ،  $V$ ،  $E$ ، ... بينما لعناصر المجموعة بالرمز  $s$ ،  $v$ ،  $e$ ، ... وإذا كان العنصر  $s$  أحد عناصر المجموعة  $S$  فإننا نقول أن "العنصر  $s$  ينتمى الى المجموعة  $S$ " ونعبر عن ذلك بالرمز  $s \in S$  ، أما اذا كان العنصر  $s$  ليس أحد عناصر المجموعة  $S$  فإننا نقول أن " العنصر  $s$  لا ينتمى الى المجموعة  $S$ " ونعبر عن ذلك بالرمز  $s \notin S$  . وهناك طريقتين للتعبير عن المجموعات :

#### الطريقة الأولى :

تتلخص هذه الطريقة فى كتابه ( ان امكن ذلك ) جميع عناصر المجموعة بين القوسين { } . فمثلاً ، اذا كانت عناصر المجموعة  $S$  هي ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ فان هذه المجموعة تكتب على النحو التالى :

$$S = \{ ١, ٣, ٥, ٧ \}$$

#### الطريقة الثانية :

تتلخص هذه الطريقة فى إيجاد خاصية أو أكثر تحدد تحديداً تاماً أى العناصر تنتمى الى تلك المجموعه . فمثلاً :

$$S = \{ s : s \text{ عدد فردى موجب} \}$$

ونقرأ  $S$  على النحو التالى " المجموعة  $S$  هي المجموعة التى عناصرها  $s$  حيث  $s$  عدد فردى موجب " ولاحظ أن

$$٣ \in S \text{ بينما } ٤ \notin S$$



وفيما يلي سنذكر بعض المجموعات كثيرة الاستخدام :

١-  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  وتسمى مجموعة الأعداد الطبيعية .

٢-  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  وتسمى مجموعة الأعداد الكلية .

٣-  $\mathbb{Q} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  وتسمى مجموعة الأعداد الصحيحة .

٤-  $\mathbb{R} = \{x : x \text{ حقيقي}\}$  وتسمى مجموعة الأعداد الحقيقية .

٥-  $\mathbb{C} = \{x : x \text{ مركبة}\}$  وتسمى مجموعة الأعداد المركبة .

٦-  $\mathbb{I} = \{x : x \text{ تخيلي}\}$  وتسمى مجموعة

الأعداد المركبة .

ملاحظه (١) :

المجموعة التي بها عدد محدد من العناصر تسمى مجموعة منتهية . خلافاً لذلك فالمجموعة تسمى مجموعة غير منتهية .

فمثلاً :  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  هي مجموعة منتهية ، بينما  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{I}$  مجموعات غير منتهية .

مثال (١) :

إذا كان  $a, b$  ،  $a > b$  فان :

١-  $\{x : a < x < b\}$  تسمى بالفترة المفتوحة ويرمز لها بالرمز  $(a, b)$

٢-  $\{x : a \leq x \leq b\}$  تسمى بالفترة المغلقة ويرمز لها بالرمز  $[a, b]$

٣-  $\{x : a < x \leq b\}$  تسمى بالفترة المفتوحة - المغلقة ويرمز لها بالرمز  $(a, b]$ .

٤-  $\{x : a \leq x < b\}$  تسمى بالفترة المغلقة - المفتوحة ويرمز لها بالرمز  $[a, b)$ .

ويمكن تمثيل المجموعات السابقة على الخط المستقيم كما تبين من شكل (١-١) في حالة

$a = 1, b = 3$  .





(٣٤١)



[٣٤١]



[٣٤١]



(٣٤١)

شكل (١-١)

ملاحظة (٢) :

الرمز  $\forall$  يعنى "لكل" أو "لاى"

الرمز  $\exists$  يعنى "يوجد"

الرمز  $\Rightarrow$  يعنى "إذا...فان" أو "تؤدى إلى"

الرمز  $\Leftrightarrow$  يعنى "إذا وإذا فقط"



### ١-١-١ : المجموعة الجزئية

يقال للمجموعة  $S$  بأنها مجموعة جزئية من المجموعة  $M$  ( ونعبر عن ذلك بالرمز  $S \subset M$  ) إذا وإذا فقط كل عنصر في  $S$  ينتمي إلى  $M$  أي أن :

$$S \subset M \Leftrightarrow \forall x (x \in S \Rightarrow x \in M)$$

وإذا كانت  $S \subset M$  ،  $S \neq M$  فإن  $S$  تسمى مجموعة جزئية فعلية من  $M$  ملاحظة (٣) :

لاحظ أن  $S \subset M$  ، لا تستبعد أن تكون  $S = M$  .

ملاحظة (٤) :

$$(S = M) \Leftrightarrow (S \subset M, M \subset S)$$

### ١-١-٢ : المجموعة الشاملة والمجموعة الخالية :

كثيراً ما تكون المجموعات التي نقوم بدراستها في مسألة ما هي مجموعات جزئية من مجموعة معطاه . مثل هذه المجموعة تسمى المجموعة الشاملة ويرمز لها بالرمز  $\Omega$  .

أيضا في دراستنا للمجموعات سنلتقى بما يسمى المجموعة الخالية وهي مجموعة ليس بها أي عنصر ويرمز لها عادة بالرمز  $\phi$  مثال (٢) :

$$S = \{x : x \neq x\} = \phi$$

$$M = \{x : x = 36, x \text{ عدد فردي}\} = \phi$$

$$C = \{x : x \text{ زوج}, x \text{ زوج}\} = \phi$$

ملاحظة (٥) :

(أ)  $\phi \subset S$  لأي مجموعة  $S$  .

(ب) جميع المجموعات الخالية متساوية ، أي أن  $\phi$  وحيدة .

### ١-١-٣ : عائلة المجموعات

كثيراً ما يحدث أن تكون عناصر المجموعة عبارة عن مجموعات . في هذه الحالة نطلق على تلك المجموعة اسم عائلة المجموعات أو فصل المجموعات . مثال (٣) :

$$A = \{A, K, Q, K\}$$

هي عائلة المجموعات  $A, K, Q, K$  .



## ١-١-٤ : العمليات الجبرية على المجموعات

### أولاً : الاتحاد

اتحاد مجموعتين  $S$  ،  $M$  يرمز له بالرمز  $S \cup M$  وهو عبارة عن مجموعة جميع العناصر التي تنتمي إلى  $S$  أو إلى  $M$  .  
أي أن :

$$S \cup M = \{ s : s \in S \text{ أو } s \in M \} .$$

### ثانياً : التقاطع

تقاطع مجموعتين  $S$  ،  $M$  يرمز له بالرمز  $S \cap M$  وهو عبارة عن مجموعة جميع العناصر التي تنتمي إلى  $S$  ،  $M$  .  
أي أن :

$$S \cap M = \{ s : s \in S , s \in M \}$$

### ثالثاً : الفرق

الفرق بين مجموعتين  $S$  ،  $M$  يرمز له بالرمز  $S - M$  وهو عبارة عن مجموعة جميع العناصر التي تنتمي إلى  $S$  ولا تنتمي إلى  $M$  .  
أي أن :

$$S - M = \{ s : s \in S , s \notin M \} .$$

### ملاحظة (٦) :

يقال للمجموعتين  $S$  ،  $M$  بأنهما منفصلتين إذا كان

$$S \cap M = \phi$$

### رابعاً : المكمل

مكملة المجموعة  $S$  هو الفرق بين المجموعتين  $S$  ،  $S'$  ويرمز لها بالرمز  $S'$  .  
أي أن :

$$S' = \{ s : s \in S' , s \notin S \}$$

$$= \{ s : s \notin S \} .$$

## ١-١-٥ : القوانين الجبرية للمجموعات

إذا كانت  $S$  ،  $M$  ،  $N$  ثلاثة مجموعات اختيارية ، فإن



١- قوانين الخمود :

$$س \cup س = س$$

$$س \cap س = س$$

٢- قوانين الدمج

$$(س \cup ص) \cup ع = س \cup (ص \cup ع)$$

$$(س \cap ص) \cap ع = س \cap (ص \cap ع)$$

٣- قوانين الابدال :

$$س \cup ص = ص \cup س$$

$$س \cap ص = ص \cap س$$

٤- قوانين التوزيع :

$$س \cup (ص \cap ع) = (س \cup ص) \cap (س \cup ع)$$

$$س \cap (ص \cup ع) = (س \cap ص) \cup (س \cap ع)$$

٥- قوانين الوحدة :

$$س \cap ش = ش$$

$$س \cup \phi = س$$

$$س \cap \phi = \phi$$

$$س \cup ش = ش$$

٦- قوانين المكمله:

$$س \cap س' = \phi$$

$$س \cup س' = ش$$

$$ش' = \phi , \phi' = ش$$

$$(س')' = س$$

٧- قوانين دي مورجان :

$$(س \cup ص)' = س' \cap ص'$$

$$(س \cap ص)' = س' \cup ص'$$

١-١-٦ حاصل ضرب المجموعات

تعريف : الزوج المرتب يتكون من عنصرين أحدهما يسمى بالعنصر الأول والآخر يسمى بالعنصر الثانى .



إذا فرض أن العنصر الأول هو  $s$  والعنصر الثانى هو  $v$  فأننا نكتب الزوج المرتب على الصورة  $(s, v)$  .

تعريف : حاصل الضرب  $s \times v$  للمجموعتين  $s, v$  هو المجموعة المكونة من جميع الأزواج المرتبة التى ينتمى العنصر الأول فى كل منها الى  $s$  وينتمى العنصر الثانى الى  $v$  ، أى

$$s \times v = \{ (s, v) : s \in s, v \in v \}$$

حاصل الضرب  $s \times v$  يسمى أيضا بحاصل الضرب الكارتيزى للمجموعتين  $s, v$  .

ملاحظة (٧) : (أ) إذا كان عدد عناصر المجموعة  $s$  هو  $n$  ، وعدد عناصر المجموعة  $v$  هو  $m$  ، فإن عدد عناصر المجموعة  $s \times v$  هو  $n \times m$  .

(ب) إذا كانت  $s = \phi$  أو  $v = \phi$  ، فإن

$$s \times v = \phi$$

(ج) إذا كانت إحدى المجموعتين غير منتهية والأخرى لاتساوى المجموعة الخالية ،

فإن  $s \times v$  هو مجموعة غير منتهية .

ملاحظة (٨) :

إذا كانت  $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  هى عائلة من المجموعات ، فإن حاصل الضرب

الكارتيزى لتلك المجموعات يكتب على النحو التالى :

$$s_1 \times s_2 \times \dots \times s_n = \prod_{m=1}^n s_m$$

وهو عبارة عن مجموعة جميع النونيات المرتبة

$$(s_1, s_2, \dots, s_n)$$

حيث

$$s_m \in s_m, (m = 1, 2, \dots, n)$$

مثال (٤) : إذا كانت

$$s = \{a, b\}, \quad v = \{1, 2, 3\},$$

$$c = \{ج, د\}$$

فان :

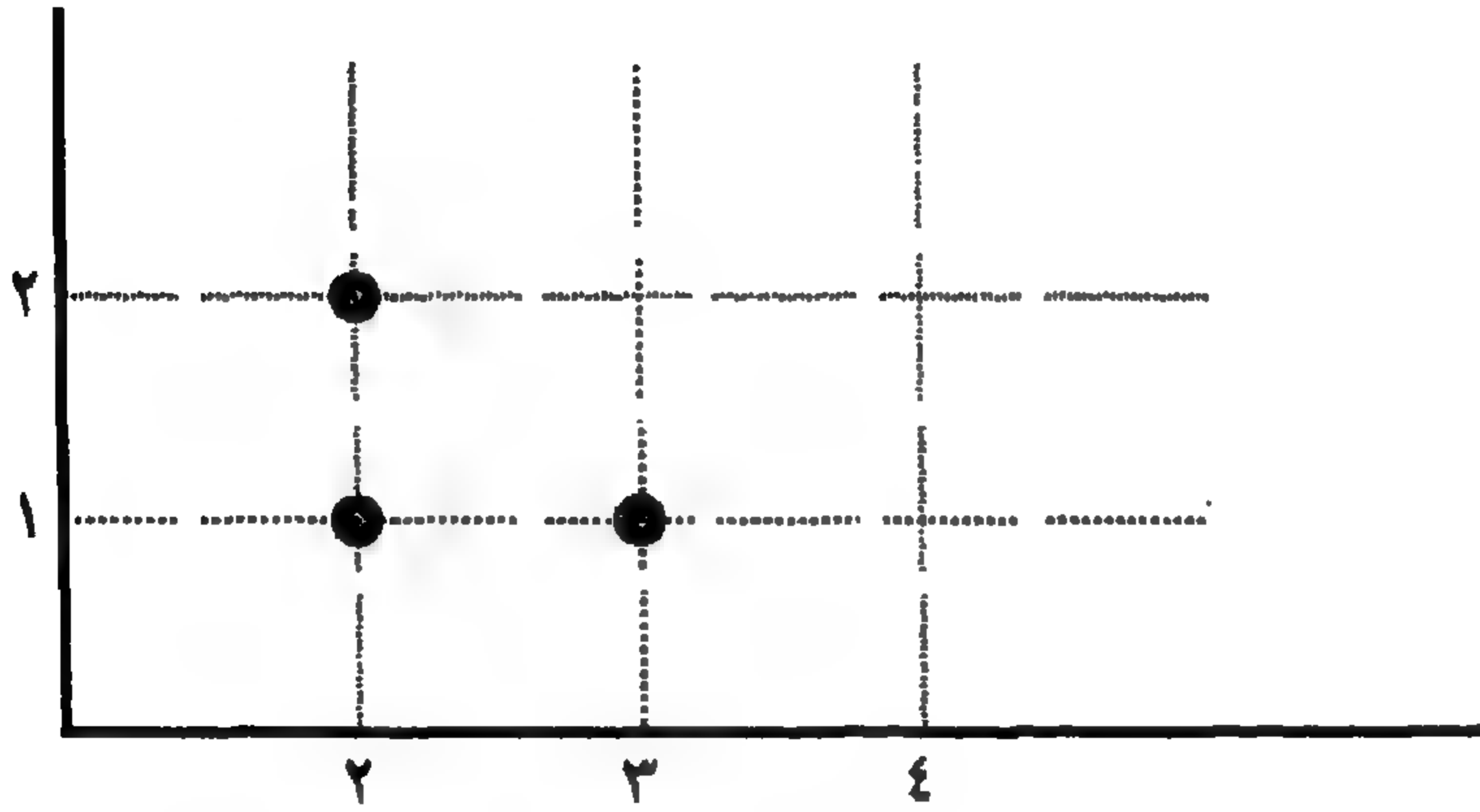
$$\begin{aligned} \text{س} \times \text{ص} \times \text{ع} = \{ (أ، ١، جـ) ، (أ، ١، د) ، (أ، ٢، جـ) ، (أ، ٢، د) ، (ب، ١، جـ) ، (ب، ١، د) ، (ب، ٢، جـ) ، (ب، ٢، د) ، \\ (أ، ٣، جـ) ، (أ، ٣، د) ، (ب، ٣، جـ) ، (ب، ٣، د) \} \end{aligned}$$

## ٢-١ : المفهوم العام للعلاقة

إذا كانت  $\text{س}$ ،  $\text{ص}$  مجموعتين غير خاليتين ، وكانت  $\text{ع} \supset \text{س} \times \text{ص}$  فاننا نقول أن  $\text{ع}$  علاقة من  $\text{س}$  إلى  $\text{ص}$  . وإذا كان  $(\text{س} ، \text{ص})$  زوج فأننا نقول أن "  $\text{س}$  في العلاقة  $\text{ع}$  مع  $\text{ص}$  " ونكتب ذلك باختصار  $\text{س} \text{ ع} \text{ ص}$  . وإذا كانت  $\text{ع} \supset \text{س} \times \text{ص}$  فاننا نقول أن  $\text{ع}$  علاقة على المجموعة  $\text{س}$  .  
مثال (٥) :

إذا كانت  $\text{س} = \{ ٢، ٣، ٤ \}$  ،  $\text{ص} = \{ ١، ٢ \}$  ، فان المجموعة التالية  $\text{ع}$  تمثل علاقة :

$$\text{ع} = \{ (١، ٢) ، (٢، ٢) ، (٣، ١) \}$$



شكل (١-٢)

شكل (١-٢) يوضح الشكل الهندسي لتلك العلاقة .  
يلاحظ أن :

$$٢ \text{ ع} ١ ، ٢ \text{ ع} ٢ ، ٣ \text{ ع} ١ ، ٣ \text{ ع} ٢ ، ٤ \text{ ع} ١ .$$



$$١٤٢ ، ١٤٣ ، ٢٤٣ ، ١٤٣ ، ١٤٣ .$$

تعريف : إذا كانت  $E$  علاقة من  $S \times S$  ، فإن معكوسها  $E^{-1}$  يعرف على الوجه التالي :

$$E^{-1} = \{ (s, v) : (v, s) \in E \}$$

مثال (٦) :

إذا كانت العلاقة

$$E = \{ (1, 2), (1, 3), (2, 3) \}$$

معرفة على  $S = \{ 1, 2, 3 \}$  ، فإن

$$E^{-1} = \{ (2, 1), (3, 1), (3, 2) \}$$

تعريف :

إذا كانت  $E \supset S \times S$  ، فإن

(أ) نطاق العلاقة  $E$  هو المجموعة

$$N = \{ s : s \in S \text{ ؛ } (s, v) \in E \}$$

(ب) مدى العلاقة  $E$  هو المجموعة

$$M = \{ v : v \in S \text{ ؛ } (v, s) \in E \}$$

### ١-٢-١ : علاقة التكافؤ

دراستنا لعلاقة التكافؤ تتطلب منا ذكر ثلاثة أنواع من العلاقات . والتعاريف التالية

ستوضح مفهوم كل منها .

تعريف :

إذا كانت  $E$  علاقة على مجموعة غير خالية  $S$  فإن  $E$  تسمى علاقة عاكسة إذا كان :

$$s \in S \vee s \in S$$

تعريف :

إذا كانت  $E$  علاقة على مجموعه غير خالية  $S$  فإن  $E$  تسمى علاقة متماثلة إذا كان :

س ع ص  $\Leftrightarrow$  ص ع س      ٧ س ، ص د س

تعريف :

إذا كانت ع علاقة على مجموعة غير خالية س فان ع تسمى علاقة متعدية إذا كان :

س ع ص ، ص ع ل  $\Leftrightarrow$  س ع ل      ٧ س ، ص ، ل د س

تعريف :

إذا كانت العلاقة ع المعرفة على المجموعة س عاكسة ومتماثلة ومتعدية ، فإنها تسمى

علاقة تكافؤ على س .

مثال (٧) :

العلاقة  $\geq$  المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية

$\mathbb{P} = \{ 1, 2, 3, \dots \}$  لا تمثل علاقة تكافؤ حيث أنها غير متماثلة

( وإن كانت عاكسة ومتعدية ) .

مثال (٨) :

إذا كانت ع، علاقة على مجموعة الأعداد الصحيحة

$\mathbb{I} = \{ 0, 1, 2, \dots \}$  حيث

$$س ع ص \Leftrightarrow \frac{س - ص}{4} \in \mathbb{I}$$

أثبت أن ع، هي علاقة تكافؤ على  $\mathbb{I}$  .

الحل :

أ - نفرض أن س د  $\mathbb{I}$

$$\text{أذن} \quad \frac{س - س}{4} \in \mathbb{I}$$

أي : س ع، س      ٧ س د  $\mathbb{I}$  .

أي أن العلاقة ع، عاكسة .

ب- نفرض أن س ، ص د  $\mathbb{I}$  ، س ع، ص .

$$\text{أذن} \quad \frac{س - ص}{4} = م \in \mathbb{I} .$$



ولكن من خواص المجموعة  $\mathbb{H}$  نجد أن  $m \in \mathbb{H}$  .

$$\text{أى : } - \left( \frac{s - v}{4} \right) \in \mathbb{H}$$

$$\text{اذن : } \frac{s - v}{4} \in \mathbb{H} \quad \text{أى : } v \in s$$

بالتالى فإن العلاقة  $\sim$  متماثلة .

ج- نفرض أن  $s \in v$  ،  $v \in e$  ،  $e \in m$  وأن  $s \in v$  ،  $v \in e$  ،  $e \in m$  .

$$\text{اذن : } \frac{s - v}{4} \in \mathbb{H} \quad ، \quad \frac{v - e}{4} \in \mathbb{H}$$

ومن خواص المجموعة  $\mathbb{H}$  نجد أن :

$$\frac{s - v}{4} + \frac{v - e}{4} \in \mathbb{H}$$

$$\text{أى : } \frac{s - e}{4} \in \mathbb{H} \quad \text{ومن ثم نجد : } s \in e$$

بالتالى ، فإن العلاقة  $\sim$  متعدية .

وحيث أن  $\sim$  عاكسه ومتماثلة ومتعدية ، أنن فهي علاقة تكافؤ .

## ٢-٢-١ : فصول التكافؤ

إذا كانت  $\sim$  علاقة تكافؤ على المجموعة  $S$  فإن فصل التكافؤ  $[s]$

لأي عنصر  $s \in S$  هو :

$$[s] = \{v : (s, v) \in \sim\}$$

عائلة فصول التكافؤ  $S/\sim$  هي :

$$S/\sim = \{ [s] : s \in S \} .$$

مثال (٩) : أوجد فصول التكافؤ للعلاقة  $\sim$  المعرفة في مثال (٨) .

الحل :

$$\mathbb{H}_0 = [0] = \{ \dots, 12, 8, 4, 0, 4, 8, 12, \dots \}$$

$$\mathbb{H}_1 = [1] = \{ \dots, 11, 7, 3, 1, 5, 9, 13, \dots \}$$

$$\mathbb{H}_2 = [2] = \{ \dots, 10, 6, 2, 14, 18, \dots \}$$

$$\{ \dots, 9, 5, 1, 3, 7, 11, 15, \dots \} = [3] = 3$$

وبلاحظ أن :

$$0 = [0] = 4$$

$$1 = [1] = 5$$

$$2 = [2] = 6$$

$$3 = [3] = 7 \text{ وهكذا } \dots$$

كذلك فإن :

$$\{ 0, 1, 2, 3, \dots \} = \text{العائلة } 3/4$$

### ٣-١ مفهوم الراسم

الراسم  $r$  هو علاقة من المجموعة  $S$  الى المجموعة  $V$  يقترن فيها كل عنصر في  $S$  بعنصر واحد فقط في  $V$  ، ويكتب في الصورة :

$$r : S \rightarrow V$$

وتسمى المجموعة  $S$  نطاق الراسم ، والمجموعة  $V$  النطاق المصاحب.

إذا كان  $s \in S$  ، فإن  $r(s)$   $\in V$  تسمى صورة العنصر  $s$  بالراسم  $r$  .

المجموعة الجزئية من  $V$  التي تتألف من جميع صور عناصر  $S$  بالراسم  $r$  تسمى مدى الراسم وسيرمز له بالرمز  $r[S]$  أى :

$$r[S] = \{ r(s) : s \in S \}.$$

مثال (١٠) : الراسم  $r : H \rightarrow C$  المعروف بالقاعدة

$$r(s) = \text{حاس} \quad \forall s \in H$$

هو راسم نطاقه  $H$  ونطاقه المصاحب  $C$  ومداه الفترة المغلقة  $[-1, 1]$   $\subset C$

تعريف : الراسم  $r : S \rightarrow V$  يسمى

أ- راسما أحاديا : إذا كان للعناصر المختلفة في  $S$  صوراً مختلفة في  $V$  . أى لكل

$$s_1, s_2 \in S, s_1 \neq s_2 \Rightarrow r(s_1) \neq r(s_2)$$

$$\text{أو } r(s_1) = r(s_2) \Rightarrow s_1 = s_2.$$



ب- راسما فوقيا : إذا كان كل عنصر في  $\mathcal{M}$  هو صورة لأحد عناصر  $\mathcal{M}$  ، أى إذا كان  $\mathcal{M} = [\mathcal{M}]$  .

ج - تناظرا أحاديا : إذا كان أحاديا وفوقيا .

مثال (١١) : إذا كان الراسم  $\mathcal{M} : \mathcal{H} \leftarrow \mathcal{H}$  معرف بالقاعدة

$$\mathcal{M}(\mathcal{S}) = (\mathcal{S}) = \mathcal{S}^2 + 1 \quad \forall \mathcal{S} \in \mathcal{H}$$

فإننا نلاحظ أن :

أ- الراسم  $\mathcal{M}$  راسم أحادى لأن :

$$\mathcal{M}(\mathcal{S}_1) = (\mathcal{S}_1) = \mathcal{S}_1^2 + 1 \leq \mathcal{S}_1^2 + 1 = \mathcal{M}(\mathcal{S}_2) = (\mathcal{S}_2)$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2 \quad \forall \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \in \mathcal{H}$$

ب- الراسم  $\mathcal{M}$  فوقى لأن :

بفرض  $\mathcal{S} \in \mathcal{H}$  ونحاول حل العلاقة

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}^2 + 1$$

$$\text{أى : } \mathcal{S} = \frac{1}{2}(\mathcal{S} - 1)$$

أذن كل عنصر  $\mathcal{S} \in \mathcal{H}$  هو صورة للعنصر  $\mathcal{S} \in \mathcal{H}$  ، أى  $\mathcal{M}[\mathcal{H}] = \mathcal{H}$  .

مثال (١٢) : إذا كان الراسم  $\mathcal{M} : \mathcal{H} \leftarrow \mathcal{H}$  معرف بالقاعدة

$$\mathcal{M}(\mathcal{S}) = (\mathcal{S}) = \mathcal{S}^3 \quad \forall \mathcal{S} \in \mathcal{H}$$

فإننا نلاحظ أن :

أ- الراسم  $\mathcal{M}$  راسم أحادى لأن :

$$\mathcal{M}(\mathcal{S}_1) = (\mathcal{S}_1) = \mathcal{S}_1^3 \leq \mathcal{S}_1^3 = \mathcal{S}_1^3 = \mathcal{M}(\mathcal{S}_2) = (\mathcal{S}_2)$$

$$\Leftrightarrow (\mathcal{S}_1 - \mathcal{S}_2)(\mathcal{S}_1^2 + \mathcal{S}_1\mathcal{S}_2 + \mathcal{S}_2^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{S}_1 - \mathcal{S}_2 = 0 \text{ أو } (\mathcal{S}_1^2 + \mathcal{S}_1\mathcal{S}_2 + \mathcal{S}_2^2) = 0$$

ومعلوم أن المعادلة  $\mathcal{S}_1^2 + \mathcal{S}_1\mathcal{S}_2 + \mathcal{S}_2^2 = 0$  لا تعطى علاقة حقيقية بين  $\mathcal{S}_1$  ،  $\mathcal{S}_2$  .  
أى أننا إذا اقتصرنا على القيم الحقيقية فإن :

ر (س١) - ر (س٢)  $\Leftarrow$  س١ - س٢  $\vee$  س١ ، س٢  $\ni$  ح .

ب- الراسم ر فوقى لأن :

بفرض ص  $\ni$  ح ونحاول حل العلاقة

ص = س<sup>٢</sup>

أى س - س<sup>٢</sup> = أى ر [ح] - ح

تعريف :

الراسم ر : س  $\Leftarrow$  ر يسمى راسماً ثابتاً إذا كان المدى ر [س] يتكون من عنصر واحد .

تعريف : الراسم ر : س  $\Leftarrow$  س المعروف بالقاعدة ر (س) = س يسمى راسم الوحدة وسيرمز له بالرمز ١ .

١-٣-١ : تحصيل الرواسم

إذا كان ر : س  $\Leftarrow$  ر

ر : ر  $\Leftarrow$  ع

راسمين ، فان الراسم

ر٢ ٥ ر١ : س  $\Leftarrow$  ع المعروف بالقاعدة :

( ر١ ٥ ر٢ ) ( س ) = ر٢ ( س ) ، ر١ ( س ) ( ر١ ٥ ر٢ )

يسمى بمحصلة الراسمين ر١ ، ر٢ على الترتيب .

١-٣-٢ : معكوس الراسم

إذا كان الراسم ر : س  $\Leftarrow$  ر وكان العنصر ص  $\ni$  ر ، فان المجموعة

{ س : س  $\ni$  ر ، ر (س) - ص } تسمى الصورة العكسية للعنصر ص تحت تأثير الراسم ر ويرمز لها

بالرمز ر<sup>-١</sup> (ص) ، أى :

ر<sup>-١</sup> (ص) - { س : س  $\ni$  ر ، ر (س) - ص }

وإذا كانت ع  $\ni$  ر ، فان الصورة العكسية للمجموعة ع تحت تأثير الراسم ر هي :



$$s^{-1}(e) = \{s : s \in S\} , \quad s(s) = \{e\}$$

مثال (١٣) :

الرسم  $s : H \leftarrow H$  معرف القاعدة

$$s(s) = \{e\}$$

$$s^{-1}(e) = \{e, e\} , \quad s^{-1}(e^{-1}) = \emptyset$$

إذا كانت  $e = \{s : s \geq e\}$  ، فإن

$$s^{-1}(e) = \{s : s \geq e^{-1} \text{ أو } e \geq s\}$$

بوجه عام ، إذا كان الرسم  $s : S \leftarrow S$  ، فإن الصورة العكسية للعنصر  $s \in S$  قد يكون المجموعة الخالية أو مجموعة مكونة من عنصر واحد أو مجموعة مكونة من أكثر من عنصر .

أما إذا كان الرسم  $s$  تناظراً أحادياً ، فإن الصورة العكسية للعنصر  $s \in S$  يكون مجموعة مكونة من عنصر واحد  $s \in S$  بحيث  $s(s) = s$  .

وفي هذه الحالة يمكن تعريف رسم من  $S$  إلى  $S$  يعين لكل عنصر  $s \in S$  صورته العكسية في  $S$  ويرمز لهذا الرسم بالرمز  $s^{-1}$  وبصفة عامة سوف نحتفظ بالرمز  $s^{-1}$  للتعبير عن العلاقة

العكسية للرسم  $s$  والتي تسمى بمعكوس الرسم  $s$  .

مثال (١٤) :

$$\text{إذا كانت } s : H \leftarrow H , \quad s^{-1}(e) = \{e\} \text{ وكان الرسم}$$

$$s : S \leftarrow S \text{ معرفاً بالقاعدة}$$

$$s(s) = \frac{1 + s^2}{s - 5}$$

أثبت أن  $s$  تناظر أحادى . كذلك أوجد معكوس هذا الرسم .

الحل :

نفرض أن  $s_1, s_2 \in \mathbb{S}$

أذن :

$$\frac{1 + s_2^2}{s_2 - 5} = \frac{1 + s_1^2}{s_1 - 5} \Leftrightarrow s_1(s_2 - 5) - s_2(s_1 - 5)$$

$$\Leftrightarrow (s_2 - 5)(1 + s_2^2) - (s_1 - 5)(1 + s_1^2)$$

لأن  $s_1 \neq 5, s_2 \neq 5 \Leftrightarrow s_2 - s_1 \neq 0$  أي أن الراسم  $s$  أحادي .

لنفرض أن  $s \in \mathbb{S}$  ونحاول حل العلاقة :

$$\frac{1 + s^2}{s - 5} = s$$

أي :

$$s^2 - 5s + 1 = 0$$

أي :

$$s = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$$\text{ومنها ينتج أن : } s = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$$

وبما أن الكسر في العلاقة الأخيرة معرف مهما كانت  $s \in \mathbb{S}$  لأن  $s \neq 5$ . أذن ، كل عنصر

$s \in \mathbb{S}$  هو صورته للعنصر

$$s = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2} \in \mathbb{S} .$$

أي أن الراسم فوقى .



وبالتالى فان سر راسم تناظر أحادى .

ولإيجاد معكوس الراسم، نفرض أن ص  $\rightarrow$  ص .

$$\text{ذن : ص} - \text{سر} (س) - \frac{١ + ص٢}{س - ٥}$$

وبالتالى :

$$\text{سر}^{-١} (ص) = \{ س : \text{سر} (س) - ص \}$$

$$= \{ س : \frac{١ + ص٢}{س - ٥} - ص \}$$

أى :

$$\text{سر}^{-١} (ص) - \frac{١ + ص٥}{٢ - ص}$$

أذن الراسم العكس هو :

$$\text{سر}^{-١} (س) - \frac{١ + ص٥}{٢ - س}$$

وبلاحظ أن :

$$(\text{سر}^{-١} (س) - \frac{١ + ص٥}{٢ - س}) - (\text{سر}^{-١} (ص) - \frac{١ + ص٢}{س - ٥})$$

$$= - \frac{(١٠ + ص٥) + (٥ - س)}{(٥ - س) ٢ - (١ + ص٢)} - \frac{١١ - س}{١١}$$

وهذا يؤكد صحة معكوس الراسم

ملاحظة (٩) :

إذا كان :  $١ : س \leftarrow ص$  ،  $٢ : ص \leftarrow ع$  راسمى تناظر أحادى ، فان

$$(1 \text{ م } 0 \text{ م } 1) = 1 \text{ م } 1 \text{ م } 0 = 1 \text{ م } 0 \text{ م } 1$$

١-٤ : الزمرة

تعريف : العملية الثنائية على المجموعة  $S$  هي راسم نطاقه حاصل الضرب الكارتيزي  $S \times S$

ونطاقه المصاحب المجموعة  $S$  .

مثال (١٥) عملية الجمع على مجموعة الأعداد الصحيحة  $\mathbb{Z} = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$  هي عملية

ثنائية يمكن التعبير عنها كالتالى

$$s : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \text{ حيث}$$

$$s(s, t) = s + t$$

مثال (١٦) : إذا كان الراسم  $s : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  معرفاً بالقاعدة

$$s(s, t) = s - t$$

فان  $(-)$  عملية ثنائية على المجموعة  $\mathbb{Z}$  .



تعريف : الزوج (  $\mathcal{S}$  ، \* ) حيث  $\mathcal{S}$  مجموعة غير خالية ، \* عملية ثنائية على  $\mathcal{S}$  يسمى نظاماً ذا عملية ثنائية .

تعريف : النظام ذو العملية الثنائية ( **نن** ، \* ) يسمى زمرة اذا كان هذا النظام يحقق الشروط التالية :

(١) \* عملية دامجہ :

(س \* ص) \* ع - س \* (ص \* ع)      ٧ س ، ص ، ع    ٨ س ، ص ، ع

(۲) یوجد عنصر محايد م  $\in$   $S$  بحيث

س \* م - م \* س - س      A س ۛ س

(۳) ۷ س ۳ یوں جو المعکوس س ۱- ۳ س یوں بحیث

س \* س - س - س \* س - م

وبتوضيح آخر نقول أن النظام ذو العملية الثنائية \* يسمى زمرة اذا كان هذا النظام (١) دمجاً (٢) به عنصر محايد (٣) يحقق خاصية المعكوس .

ملاحظه (۱۰) :

إذا تحققت بالإضافة الى الشروط السابقة في التعريف السابق خاصية الابدال :

س \* ص - ص \* س      ٧ س ، ص ٣ س .

فان الزمره تسمى زمرة إبدالية .

مثال (١٧) : أثبت أن النظام  $(S, *)$  زمرة حيث  $S$  هي مجموعة المصفوفات المربعة  $2 \times 2$  الغير شاذة وأن  $*$  هي عملية ضرب المصفوفات .

( المصفوفة الغير شاذة هي المصفوفة التي محددها لا يساوى صفراً ) .

الحل :

نفرض أن  $\alpha, \beta, \gamma \in S$  حيث

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \alpha, \quad a_1 d_1 - b_1 c_1 \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \beta, \quad a_2 d_2 - b_2 c_2 \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix} = \gamma, \quad a_3 d_3 - b_3 c_3 \neq 0$$

أذن:

$$\alpha * \beta = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 + b_1 c_2 & a_1 b_2 + b_1 d_2 \\ c_1 a_2 + d_1 c_2 & c_1 b_2 + d_1 d_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 a_2 + b_1 c_2 & a_1 b_2 + b_1 d_2 \\ c_1 a_2 + d_1 c_2 & c_1 b_2 + d_1 d_2 \end{pmatrix}$$

أى أن  $*$  عملية ثنائية على المجموعة  $S$  .



٢- العملية \* دمجها لأن :

٣- المصفوفة  $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$  هي المصفوفة المحايدة للمجموعة  $M_{2 \times 2}$  لأن :

$$\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} ا & ب \\ ج & د \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ا & ب \\ ج & د \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ا & ب \\ ج & د \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ا & ب \\ ج & د \end{pmatrix}$$

$$\alpha^{-1} = \frac{١}{ا د - ب ج} \begin{pmatrix} د & -ب \\ -ا & ج \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}$$

هو معكوس المصفوفة  $\alpha$  .

أى أن كل عنصر في المجموعة  $M$  له معكوس .

وعلى سبيل المثال ، اذا كانت

$$\alpha = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix} \quad \text{فان} \quad \alpha^{-1} = \frac{١}{١١} \begin{pmatrix} ٣ & -٢ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix}$$

$$\alpha^{-1} * \alpha = \begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{pmatrix} \frac{١}{١١} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} \quad \text{لأن :}$$

٥- \* لا تمثل عملية إبدالية ، أى أن :

$$\alpha * \beta \neq \beta * \alpha$$

اذن النظام (  $\mathbb{R}^2$  ، \* ) زمرة غير إبدالية .

١-٥ : الفراغ الاتجاهى ثنائى البعد

إذا نظرنا الى تعريف حاصل ضرب مجموعتين [انظر بند (١-١-٦) ] ، ووضعنا

$\mathbb{R} = \mathbb{C} = \mathbb{H}$  ( حيث  $\mathbb{H}$  مجموعة الأعداد الحقيقية ) ، فإن

$$\mathbb{H} \times \mathbb{H} = \{ (s, v) : s \in \mathbb{H}, v \in \mathbb{H} \}$$

وسوف نرمز للمجموعة  $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$  بالرمز  $\mathbb{H}^2$  .

تعريف :

١- لكل  $a = (s_1, v_1) \in \mathbb{H}^2$  ،  $b = (s_2, v_2) \in \mathbb{H}^2$  ، يعرف مجموع

$a, b$  على أنه :

$$a + b = (s_1 + s_2, v_1 + v_2) \in \mathbb{H}^2$$

٢- لكل  $a = (s, v) \in \mathbb{H}^2$  ، لكل  $k \in \mathbb{H}$  ، يعرف ضرب  $a$  فى  $k$  على أنه :

$$k \cdot a = (ks, kv) \in \mathbb{H}^2$$

المجموعة  $\mathbb{H}^2$  مع عمليتي الجمع والضرب المشار إليهما فى التعريف السابق تسمى فراغ اتجاهى

حقيقى ثنائى البعد . وعناصر هذا الفراغ تسمى متجهات ثنائية البعد . سنرمز لهذه المتجهات بالرمز

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$$

تعريف : المتجهان  $\vec{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{H}^2$  ،  $\vec{b} = (b_1, b_2) \in \mathbb{H}^2$  يكونان متساويان

إذا وفقط إذا  $a_1 = b_1$  ،  $a_2 = b_2$  .

فيما يلى ، سنورد خواص عملية الجمع " + " المعرفه على المجموعة  $\mathbb{H}^2$  .

$$١- \vec{a} + \vec{b} \in \mathbb{H}^2, \vec{a} \vee \vec{b} \in \mathbb{H}^2 \quad (\text{خاصية الانغلاق})$$

$$٢- ( \bar{A} + \bar{B} ) + \bar{C} = \bar{A} + ( \bar{B} + \bar{C} ) , \quad \bar{A} \vee \bar{B} , \quad \bar{B} , \quad \bar{C} \text{ دح}^٢ .$$

(خاصية الدمج)

٣- المتجه ( صفر ، صفر ) دح<sup>٢</sup> يرمز له بالرمز  $\bar{0}$  وهو يحقق :

$$\bar{A} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{A} = \bar{A} , \quad \bar{A} \vee \bar{0} \text{ دح}^٢$$

( خاصية العنصر المحايد )

المتجه  $\bar{0} = ( ٠ , ٠ )$  يسمى المتجه الصفري.

٤- اذا كان  $\bar{A} = ( A_1 , A_2 )$  دح<sup>٢</sup> ، فان المتجه

$$( ١ - A_1 , ١ - A_2 ) = \bar{A}$$

يرمز له بالرمز  $\bar{A}$  ويحقق

$$\bar{A} + \bar{A} = ( \bar{A} - ) + ( \bar{A} - ) = \bar{A}$$

المتجه  $\bar{A}$  هو المعكوس الجمعي للمتجه  $\bar{A}$  .

( خاصية المعكوس )

$$٥- \bar{A} + \bar{B} = \bar{B} + \bar{A} , \quad \bar{A} \vee \bar{B} , \quad \bar{B} \text{ دح}^٢$$

(خاصية الابدال)

أما عملية ضرب المتجهات في عدد حقيقي فإنها تحقق الخواص الآتية :

$$١- K ( \bar{A} + \bar{B} ) = K \bar{A} + K \bar{B} , \quad \bar{A} \vee \bar{B} , \quad \bar{B} \text{ دح}^٢ , \quad K \text{ دح}$$

(خاصية التوزيع)



$$٢- (ك_١ + ك_٢) \bar{f} = \bar{f}_{ك_١} + \bar{f}_{ك_٢} , \quad \forall \bar{f} \in \mathcal{D}^٢(ك_١, ك_٢) , \quad (خاصية التوزيع)$$

$$٣- (ك_١, ك_٢) \bar{f} = \bar{f}_{(ك_١, ك_٢)} , \quad \forall \bar{f} \in \mathcal{D}^٢(ك_١, ك_٢) , \quad (خاصية الدمج)$$

$$٤- ك \bar{f} = \bar{f}_{ك} \Leftrightarrow \bar{f} = \bar{f}_٠ , \quad \forall \bar{f} \in \mathcal{D}^٢(ك, ٠) , \quad (خاصية الحذف)$$

إذا كان  $\bar{f} = \bar{f}_{(٠, ١)} \in \mathcal{D}^٢(٠, ١)$  ،  $\bar{f} = \bar{f}_{(١, ٠)} \in \mathcal{D}^٢(١, ٠)$  فإنه يمكن كتابة أى متجه

$$\bar{f} = \bar{f}_{(١, ١)} \in \mathcal{D}^٢(١, ١) \text{ بدلالة كل من المتجهين } \bar{f}_١ , \bar{f}_٢ \text{ على النحو التالى :}$$

$$\begin{aligned} \bar{f}_{(١, ١)} &= \bar{f}_{(١, ٠)} + \bar{f}_{(٠, ١)} \\ &= \bar{f}_١ + \bar{f}_٢ \\ &= \bar{f}_١ + \bar{f}_٢ \end{aligned}$$

تعريف : إذا كان  $\bar{f} = \bar{f}_{(١, ١)} \in \mathcal{D}^٢(١, ١)$  ،  $\bar{f} = \bar{f}_{(٢, ١)} \in \mathcal{D}^٢(٢, ١)$  ، فإن حاصل الضرب القياسى

للمتجهين  $\bar{f}_١ , \bar{f}_٢$  يعرف على أنه العدد الحقيقى

$$\bar{f}_١ \cdot \bar{f}_٢ = \bar{f}_{(١, ٢)}$$

تعريف : إذا كان  $\bar{f} = \bar{f}_{(١, ١)} \in \mathcal{D}^٢(١, ١)$  ، فإن طول  $\bar{f}$  ، ويرمز له بالرمز  $\|\bar{f}\|$  ، يعرف كالتالى

$$\|\bar{f}\| = \sqrt{\bar{f}_١ \cdot \bar{f}_١ + \bar{f}_٢ \cdot \bar{f}_٢} = \sqrt{\bar{f}_١^2 + \bar{f}_٢^2}$$

ملاحظة (١١) : من التعريف السابق نرى أن :

$$\|\bar{f}\| \geq ٠ \quad (١)$$

$$\|\bar{f}\| = ٠ \Leftrightarrow \bar{f} = ٠ \quad (٢)$$



ب = (ب<sub>١</sub>، ب<sub>٢</sub>) مستقلين خطيا هو : أ<sub>١</sub>ب<sub>٢</sub> - أ<sub>٢</sub>ب<sub>١</sub> ≠ ٠

مثال (٢٠) : المتجهان  $\vec{A} = (٢، ١)$  ،  $\vec{B} = (٤، ٢)$  مرتبطان خطيا ، لأن

$$٢ \vec{A} - \vec{B} = ٠$$

$$\text{أى } \vec{A} = \vec{B}$$

حيث ك<sub>١</sub>=٢ ، ك<sub>٢</sub>=١ -١ وكلاهما لا يساوى الصفر .

ملاحظة (١٣) : اذا كانت هـ هى الزاوية بين المتجهين  $\vec{A}$  ،  $\vec{B}$  دح<sup>٢</sup> ، فان

$$\text{جنا هـ} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{A}\| \|\vec{B}\|}$$

#### ٦-١ : القطعة المستقيمة الموجهة

نفرض أن أ ، ب نقطتين فى المستوى "ح<sup>٢</sup>". القطعة المستقيمة أ ب هى المجموعة التى عناصرها أ ، ب وكل النقط الواقعة على الخط المستقيم أ ب والمحصورة بين أ ، ب .

القطعة المستقيمة الموجهة من أ الى ب ، ويرمز لها بالرمز  $\overrightarrow{AB}$  ، هى القطعة المستقيمة التى تبدأ من أ وتنتهى عند ب . النقطة أ تسمى نقطة البدء . النقطة ب تسمى نقطة النهاية .

طول القطعة المستقيمة الموجهة أ ب هو البعد بين النقطتين أ ، ب ، ويرمز له

بالرمز  $||\overrightarrow{AB}||$  .

**تعريف :** يقال لقطعتين مستقيمتين موجهتين أ ب ، ج د أنهما متكافئتين

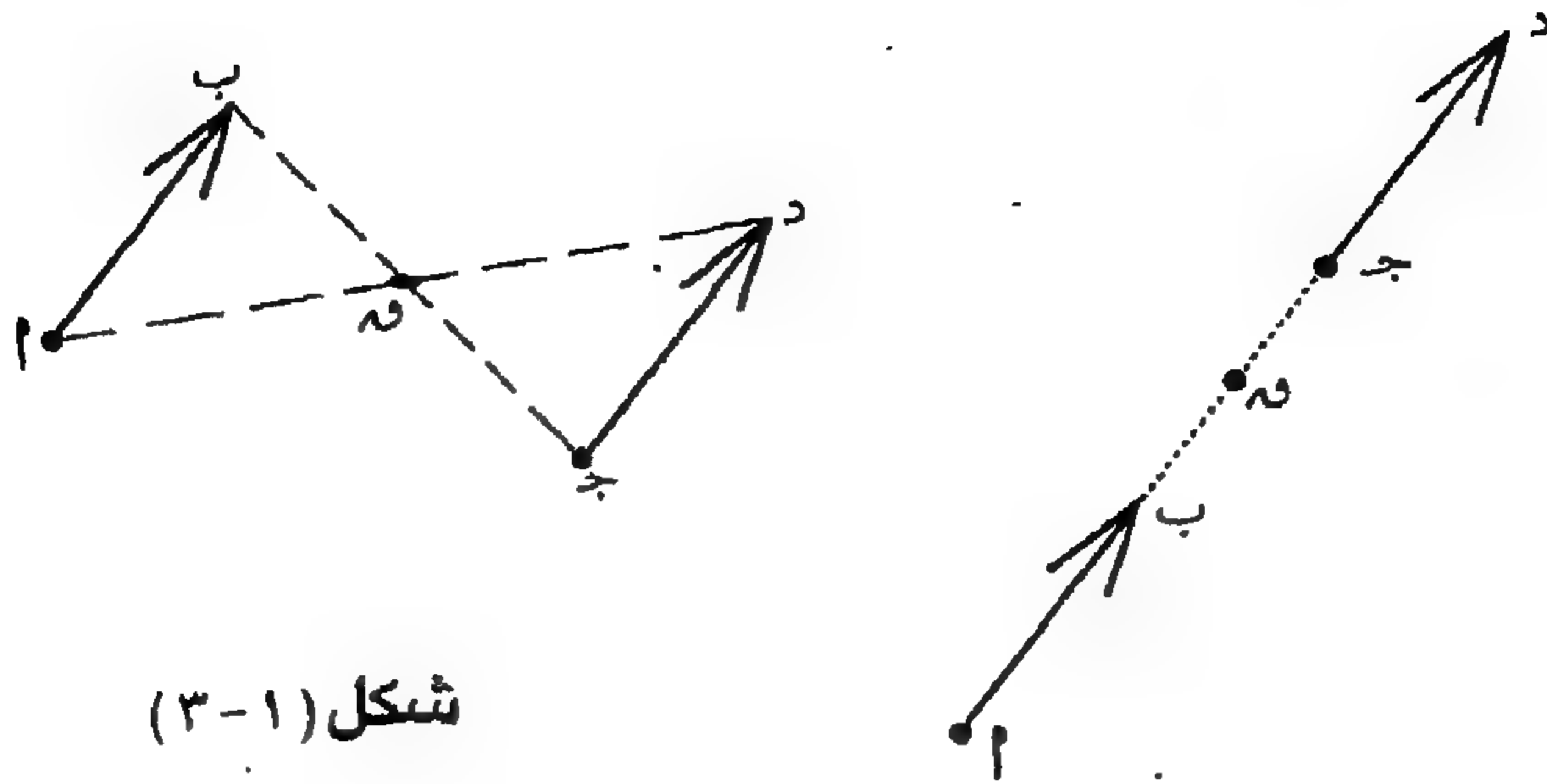
اذا كان لهما نفس الطول والاتجاه .

عندما أ ب تكافئ ج د ، فاننا نكتب أ ب = ج د

وبلغة أخرى ، فان أ ب = ج د اذا كان لهما نفس الطول، ق هى منتصف كل من



أ د ، ب جـ (انظر شكل (٣-١)).



شكل (٣-١)

نظرية : إذا كانت أ ب ، جـ د قطع مستقيمة موجهة غير واقعة على استقامة واحدة ، فإن الشكل الرباعي أ ب د جـ يكون متوازي أضلاع إذا وفقط إذا أ ب  $\equiv$  جـ د

أ البرهان :

لنفرض أن أ ب  $\equiv$  جـ د . اذن ق هي منتصف كل من أ د ، ب جـ . بالتسالي ، فإن الأقطار أ د ، ب جـ للشكل الرباعي أ ب د جـ تتقاطع في ق . اذن أ ب د جـ متوازي أضلاع

عكسيا ، اذا كان أ ب د جـ متوازي أضلاع ، فإن الاقطار أ د ، ب جـ تتقاطع في ق . اذن أ ب  $\equiv$  جـ د .

نتيجة : اذا كان أ ب  $\equiv$  جـ د ، فإن  $\| أ ب \| = \| جـ د \|$  ؛ أ ب ، جـ د إما متوازيان أو على استقامة واحدة .

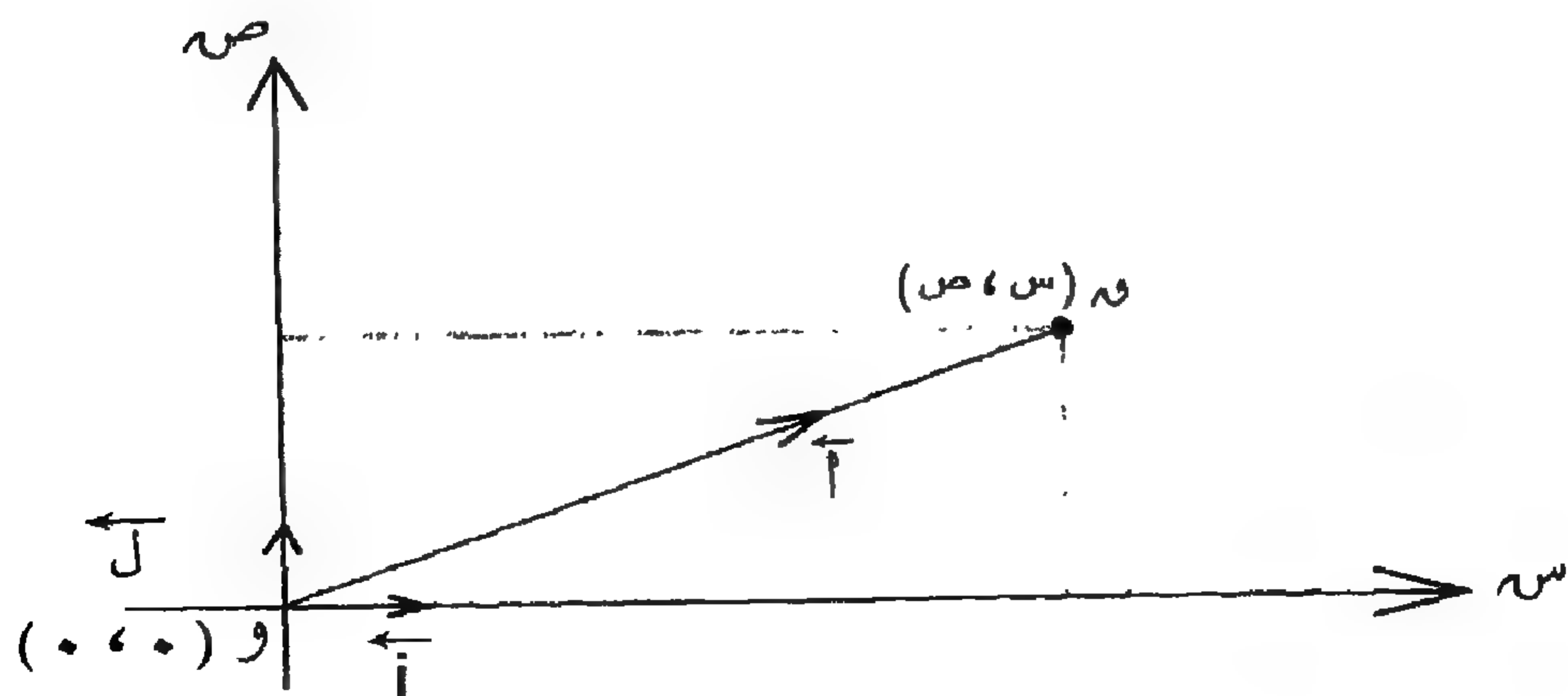
لا حظ أن عكس هذه النتيجة غير متحقق .

كل متجه يمكن تمثيله هندسياً بقطعة مستقيمة موجهة طولها واتجاهها هما طول واتجاه المتجه . بهذا يمكن تمثيل أى متجه معطى بالعديد من القطع المستقيمة الموجهة وذلك حيث أن موقع القطعة المستقيمة ليس محدداً ولكن المحدد هو فقط طولها واتجاهها . أى قطعتين مستقيمتين موجهتين متكافئتين تمثلان نفس المتجه ، وبالعكس إذا كانت القطعة المستقيمة  $\overrightarrow{AB}$  تمثل متجه معلوم فإنه يمكن تمثيل نفس المتجه أيضاً بقطعة مستقيمة موجهة  $\overrightarrow{CD}$  مكافئة للقطعة المستقيمة الموجهة  $\overrightarrow{AB}$

إذا كانت القطعة المستقيمة  $\overrightarrow{AB}$  تمثل المتجه  $\overrightarrow{n}$  ، فإن القطعة المستقيمة الموجهة  $\overrightarrow{BA}$  تمثل المتجه  $-\overrightarrow{n}$  .

دعنا نفترض الآن أن جميع المتجهات ثنائية البعد سيتمثل بقطع مستقيمة تقع فى مستوى ثابت . إذن من الممكن تعيين الأحداثيات لنقطتى بدايه ونهاية القطعة المستقيمة الممثلة لأى متجه . سنفترض أننا أنشأنا نظاماً للأحداثيات فى هذا المستوى فيه المحاور متعامدة .

لإستخدام الأحداثيات الكارتيزية عند التعامل مع المتجهات ، فمن المفيد أن نعرف متجهى وحده  $\vec{i}$  ،  $\vec{j}$  على إمتداد محورى الأحداثيات . سنأخذ اتجاه متجه الوحدة  $\vec{i}$  فى الاتجاه الموجب لمحور السنيات واتجاه متجه الوحدة  $\vec{j}$  فى الاتجاه الموجب لمحور الصادات (شكل ١-٤) .



شكل (١-٤)

إذا كانت ق (س،ص) أى نقطه فى المستوى ، ونقطه الأصل ، فإن القطعة المستقيمة الموجهه  $\overrightarrow{وق}$  تسمى متجه الموضع للنقطة ق .

إذا كان  $\vec{A}$  هو المتجه الممثل بالقطعه المستقيمة الموجهه  $\overrightarrow{وق}$  فإنه يمكننا كتابة :

$$\vec{A} = \overrightarrow{وق} = \vec{A}_س + \vec{A}_ص$$

إذا كانت ق<sub>١</sub> (س<sub>١</sub> ، ص<sub>١</sub>) ، ق<sub>٢</sub> (س<sub>٢</sub> ، ص<sub>٢</sub>) أى نقطتين فى المستوى . فإن القطعة المستقيمة الموجهه

$$\overrightarrow{ق_١ ق_٢} = (س_٢ - س_١ ، ص_٢ - ص_١)$$

حيث أن

$$\overrightarrow{وق_١} = (س_١ ، ص_١) = \vec{A}_س_١ + \vec{A}_ص_١$$

$$\overrightarrow{وق_٢} = (س_٢ ، ص_٢) = \vec{A}_س_٢ + \vec{A}_ص_٢$$

ومن قاعدة جمع المتجهات نعلم أن :

$$\overrightarrow{وق_١} = \overrightarrow{وق_١ ق_٢} + \overrightarrow{وق_٢}$$

اذن

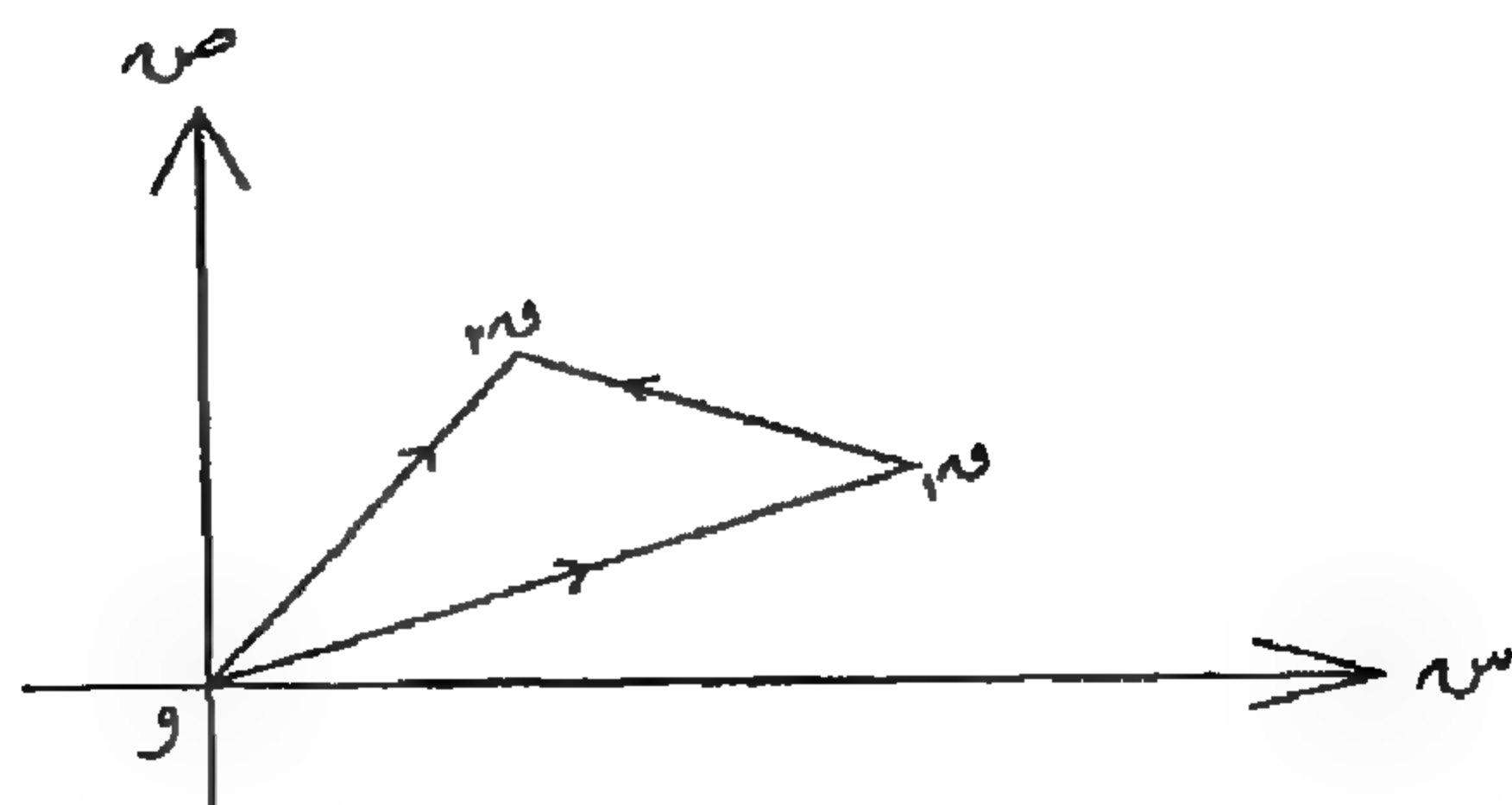
$$\overrightarrow{وق_١ ق_٢} = \overrightarrow{وق_١} - \overrightarrow{وق_٢}$$

أى

$$\overrightarrow{ق_١ ق_٢} = (\vec{A}_س_١ + \vec{A}_ص_١) - (\vec{A}_س_٢ + \vec{A}_ص_٢)$$

$$= \vec{A}_ص_١ - \vec{A}_ص_٢ + \vec{A}_س_١ - \vec{A}_س_٢$$

$$= (س_١ - س_٢ ، ص_١ - ص_٢)$$



شكل (١-٥)



افرض أن متجه الموضع  $\vec{OQ} = (s, v)$  يمثل متجه  $\vec{A}$  . المتجه  $\vec{A}$  يمكن تمثيله بأى قطعة مستقيمة موجهة مكافئه لمتجه الموضع  $\vec{OQ}$  ونقطة بدايتها أى نقطة فى المستوى .

دعنا نوجد القطعة المستقيمة الموجهة التى نقطه بدايتها النقطة

ك  $(s, v)$  والممثلة للمتجه  $\vec{A}$  .

لنفرض أن ك'  $(s_1, v_1)$  هى نقطة نهاية هذه القطعة المستقيمة الموجهة .

اذن، مما سبق ، نجد أن

$$K' = (s_1, v_1) = (s, v) - (s_0, v_0)$$

حيث أن هذه القطعة المستقيمة الموجهة تمثل نفس المتجه  $\vec{A}$  وبالتالي تكافؤ متجه الموضع

$$\vec{OQ} = (s, v) \text{ ، فانه ينتج أن}$$

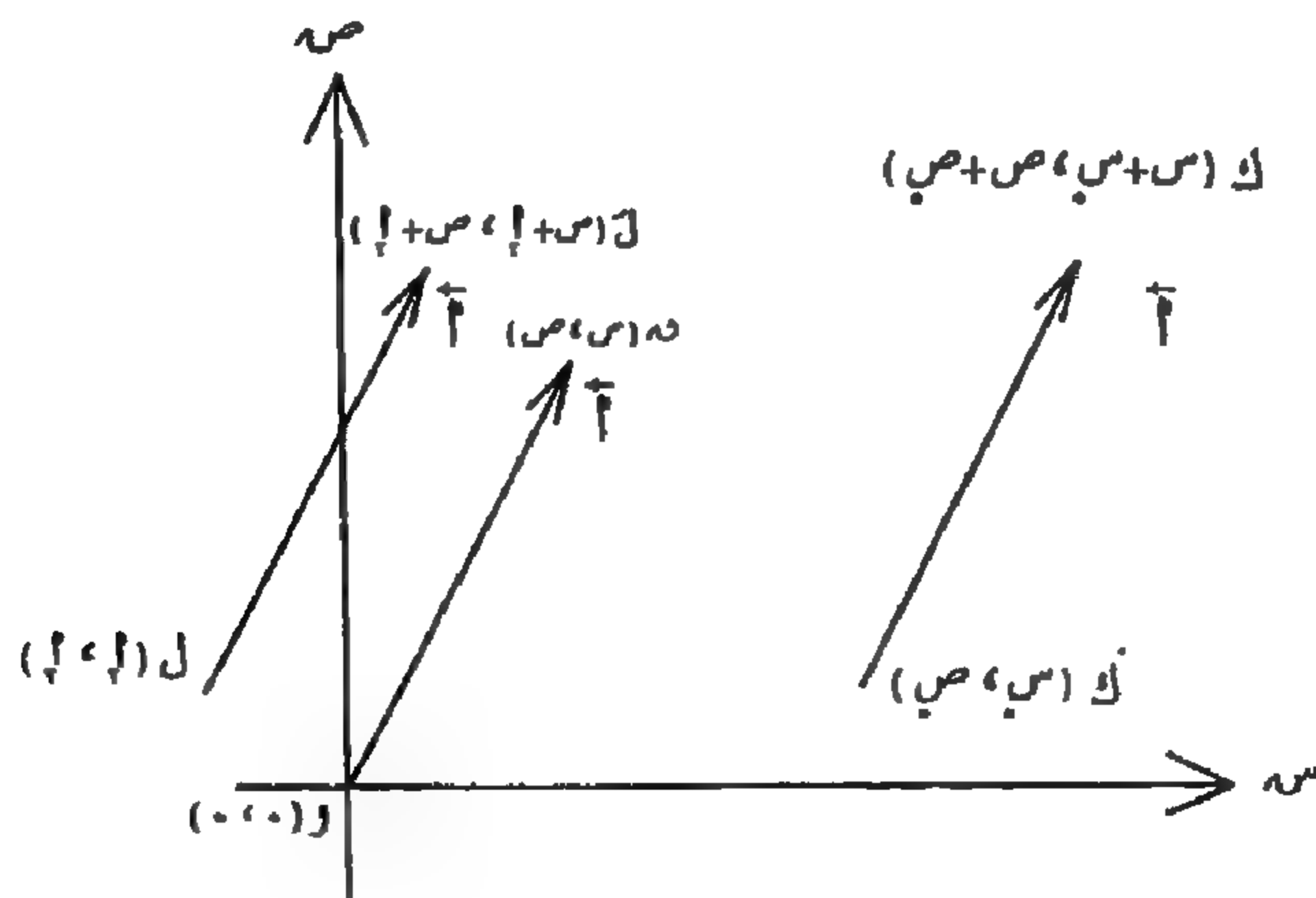
$$s_1 = s - s_0 \text{ ، } v_1 = v - v_0$$

أى أن

$$s_1 + s_0 = s \text{ ، } v_1 + v_0 = v$$

اذن يمكن تمثيل المتجه  $\vec{A} = (s, v)$  بالقطعة المستقيمة الموجهة  $K'K$  ، حيث

ك  $(s, v)$  ، ك  $(s + s_0, v + v_0)$  . الشكل (٦-١) يوضح بعض التمثيلات الهندسية للمتجه  $\vec{A} = (s, v)$  .



شكل (٦-١)

يمكن أيضاً ملاحظة أنه بالرغم من أن المتجه  $\vec{A}$  (س ، ص) يمكن تمثيله هندسياً بأكثر من قطعة مستقيمة موجهه . إلا أنه يوجد متجه موضع واحد بالضبط مناظر للمتجه  $\vec{A}$  .

ملاحظة (١٤) : إذا كانت  $Q_1(س_1، ص_1)$  ،  $Q_2(س_2، ص_2)$  ،  $Q_3(س_3، ص_3)$  نقط معطاه في المستوى ، فإن :

$$Q(س_3 + س_2 - س_1 ، ص_3 + ص_2 - ص_1)$$

بحيث أن :

$$\vec{Q_2 Q_1} = \vec{Q_3 Q_1}$$

#### ٧-١ : التحويلة الهندسية

تعريف : الراسم  $س : ح \leftarrow$  يسمى تحويلة خطية إذا كان

$$(١) \quad س( \vec{A} + \vec{B} ) = س(\vec{A}) + س(\vec{B}) \quad ؛ \quad \forall \vec{A} ، \vec{B} \in دح'$$

$$(٢) \quad س(\vec{K}) = س(\vec{A}) \quad ؛ \quad \forall \vec{A} \in دح' ، \vec{K} \in \{0\}$$

تعريف : الراسم  $س : ح \leftarrow$  المتناظر أحادياً يسمى تحويلة هندسية أو تحويلة مستوية .

مثال (٢١) : أثبت أن الراسم  $س : ح \leftarrow$  المعروف بالقاعده

$$س(س، ص) = (س، ص - س)$$

هو تحويلة خطية .

الحل :

$$\text{نفرض أن } \vec{A} = (س_1، ص_1) ، \vec{B} = (س_2، ص_2)$$

اذن :

$$\vec{A} + \vec{B} = (س_1، ص_1) + (س_2، ص_2) = (س_1 + س_2 ، ص_1 + ص_2)$$

بالتالى فان :

$$((v_1 + v_2) - s_1 + s_2, s_1 + s_2) = (\bar{f} + \bar{g})_s$$

$$((r_{ص} - r_{س}) + (i_{ص} - i_{س}), r_{س} + i_{س}) =$$

$$(r_s - r_{ss}, r_{ss}) + (s_s - s_{ss}, s_{ss}) =$$

$$(\vec{b})_r + (\vec{f})_r =$$

أيضا ، اذا كان  $K$  دوح -  $\{0\}$  ، فان  $K = \bar{K} = (K, S_1, V_1) = (K, S_1, V_1)$

بالتالى :

$$r_k(\vec{r}) = [k s_1, k(s_1 - s_2)]$$

$$= (s_1, (s_1 - v_1))$$

كس (ف)

اذن ، میں تحویلہ خطیہ .

مثال (٢٢) : الراسم من : ح<sup>١</sup> ← ح<sup>٢</sup> المعروف بالقاعده

س (س، ص) - (س<sup>۲</sup>، ص<sup>۲</sup>)      ۷ (س، ص) ص ح<sup>۲</sup>

لا يمثل تحويله مستوية ( هندسية ) لأن :

١- م راسم غير احادى . فمثلاً : النقطة (٤،٩) تكون صورته لكل من النقطتين (٢،٣) ، (-٢،٣)

٢- سر غير فوقى ، لأن النقطة (٣،٩) مثلاً لا يمكن أن تكون صورته لأى نقطه

(س، ص) في المستوى .

مثال (٢٣) : ليكن الاسم  $\alpha$  :  $\alpha \leftarrow \alpha$  المعرف بالقاعده

$$\left( \frac{\sqrt[3]{s} - s}{2}, \frac{\sqrt[3]{s} + s}{2} \right) = (s, s)$$

١- هل الراسم تحويله خطيه؟



٢- هل الراسم تحويله هندسية (مستوية)؟

الحل :

نفرض أن  $\vec{A} = (s_1, s_2, s_3)$  ،  $\vec{B} = (s_1, s_2, s_3)$

اذن :

$$\vec{A} + \vec{B} = (s_1 + s_1, s_2 + s_2, s_3 + s_3)$$

وبالتالي فان :

$$\begin{aligned} & s = (\vec{A} + \vec{B}) = (s_1 + s_1, s_2 + s_2, s_3 + s_3) \\ & = \frac{(s_1 + s_1, s_2 + s_2, s_3 + s_3)}{2} + \frac{(s_1 + s_1, s_2 + s_2, s_3 + s_3)}{2} \\ & = \left( \frac{s_1 + s_1}{2}, \frac{s_2 + s_2}{2}, \frac{s_3 + s_3}{2} \right) + \left( \frac{s_1 + s_1}{2}, \frac{s_2 + s_2}{2}, \frac{s_3 + s_3}{2} \right) \\ & = (s_1, s_2, s_3) + (s_1, s_2, s_3) = 2(s_1, s_2, s_3) \end{aligned}$$

أيضاً ، اذا كان ك ح - {0} ، فان ك  $\vec{A} = \vec{B}$  ك (س<sub>١</sub> ، س<sub>٢</sub> ، س<sub>٣</sub>)

$$= (ك س_١ ، ك س_٢ ، ك س_٣)$$

وبالتالي :

$$\begin{aligned} & s(ك \vec{A}) = s(ك س_١ ، ك س_٢ ، ك س_٣) \\ & = \left( \frac{ك س_١ + ك س_١}{2}, \frac{ك س_٢ + ك س_٢}{2}, \frac{ك س_٣ + ك س_٣}{2} \right) \\ & = (ك س_١ ، ك س_٢ ، ك س_٣) = ك (س_١ ، س_٢ ، س_٣) = ك \vec{A} \end{aligned}$$

اذن الراسم س هو تحويله خطيه . كما أن هذا الراسم هو تحويله هندسية .

٨-١ : مصفوفة التحويل

ملاحظة (١٥) : الراسم س : ح' ← ح' المعروف بالقاعدة

$$s = (s, v) = (s', v')$$

حيث

$$(1) \quad s' = s + b \quad v$$

$$(2) \quad v' = s + d \quad v$$

يسمى تحويل خطية في المستوى .

المعادلتان (1) ، (2) يمكن كتابتها في الصورة :

$$\begin{pmatrix} s' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}$$

أى أن :

$$ad - bc \neq 0, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}$$

هى المصفوفة التى تمثل هذا التحويل . وغالباً نسميها مصفوفة التحويل .

مثال (٢٤) : أوجد صورته المربع الذى رؤوسه هى النقط (٠،٠)، (٠،١)، (١،١)، (١،٠) تحت تأثير

$$\text{مصفوفة التحويل} \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}.$$

الحل :

$$-1 \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}$$

اذن صورة النقطة (٠،٠) هى (٠،٠)

$$-2 \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}$$

اذن صورة النقطة  $(0,1)$  هي  $(أ، ب)$

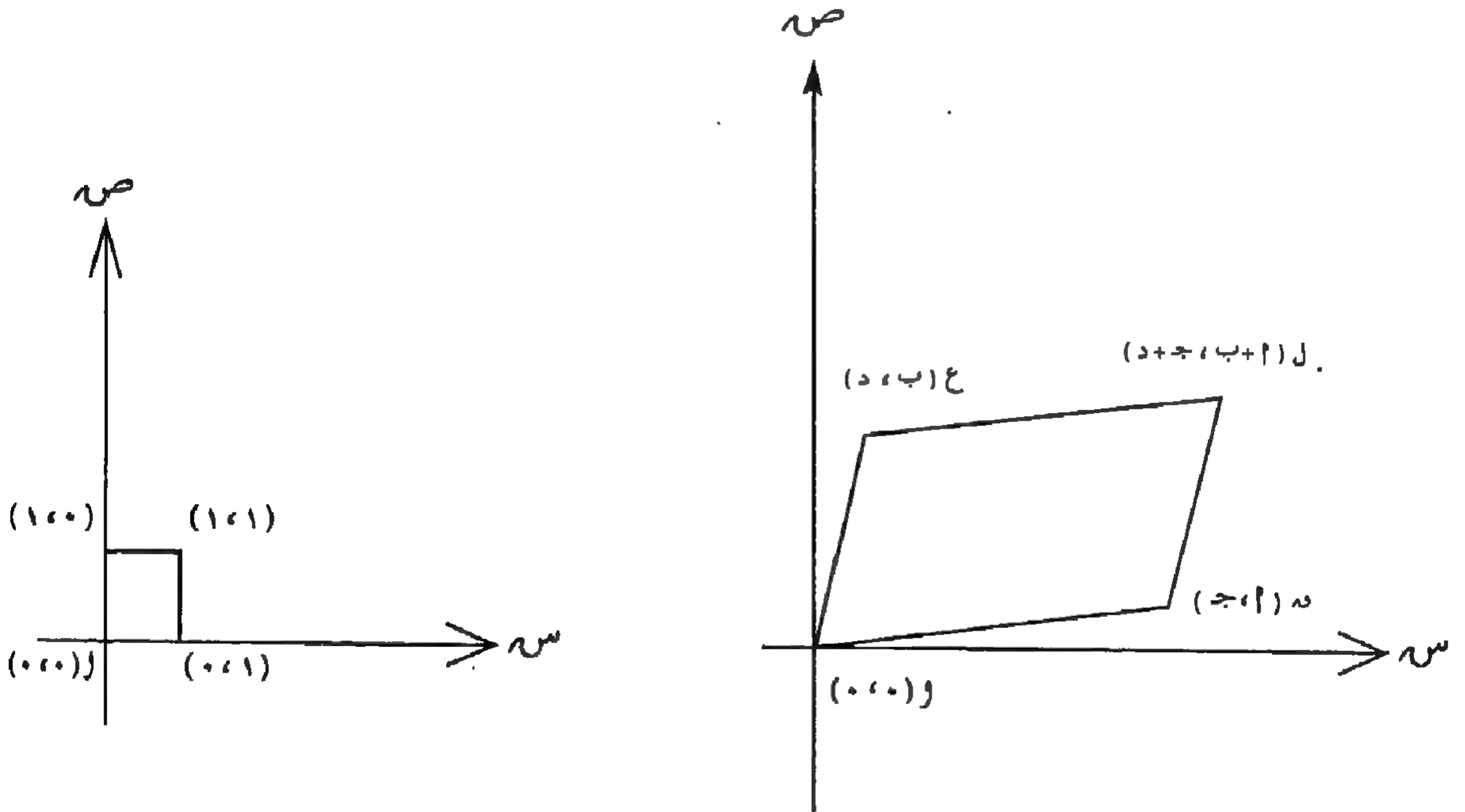
$$3 - \begin{pmatrix} أ+ب \\ د+ج \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} أ & ب \\ د & ج \end{pmatrix}$$

اذن صورة النقطة  $(1,1)$  هي  $(أ+ب، ج+د)$

$$4 - \begin{pmatrix} ب \\ د \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} أ & ب \\ د & ج \end{pmatrix}$$

اذن صورة النقطة  $(1,0)$  هي  $(ب، د)$

أى أن المربع الذى رؤوسه :  $(0,0)$  ،  $(0,1)$  ،  $(1,1)$  ،  $(1,0)$  يتحول الى متوازى الأضلاع الذى رؤوسه هي النقط :  $(0,0)$  ،  $(أ، ج)$  ،  $(أ+ب، ج+د)$  ،  $(ب، د)$  على الترتيب كما فى شكل (٧-١) . وواضح أن مساحة متوازى الأضلاع تختلف عن مساحة المربع .



شكل (٧-١)



مثال (٢٥) : أوجد صورة الدائرة

$$\Delta = \{ (s, v) : s^2 + v^2 = 1 \}$$

بالتحويل التي مصفوفتها هي  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$  ،  $k \in (0, 1)$  .

الحل :

النقطة  $(\cos \theta, \sin \theta) \in \Delta$

$$\text{اذن : } \begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

أي أن :

$$\begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ k \sin \theta \end{pmatrix}$$

أي أن :

$$(1) \quad s = \cos \theta$$

$$(2) \quad v = k \sin \theta$$

بجذف البارامتر  $\theta$  من (١) ، (٢) ، ينتج أن :

$$1 = \frac{s^2}{k^2} + v^2$$

أي أن :

$$\Delta' = \{ (s', v') : \frac{s'^2}{k^2} + v'^2 = 1, k \in (0, 1) \}$$

وهي صورة الدائرة  $\Delta$  . ويتبين أنها تمثل قطع ناقص طولاه نصفى محوريه هما ١ ،  $k$  واختلافه المركزى  $\sqrt{1 - k^2}$

ملاحظة (١٦) : في المثال السابق ، اذا كانت الدائره

$$\mathcal{H} = \{ (s, v) : s^2 + v^2 = 1 \}$$

فان صورتها  $\mathcal{H}'$  تحت تأثير المصفوفة  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$  ، ك  $(1,0)$

تصبح :

$$\mathcal{H} = \{ (s, v) : \frac{s^2}{1} + \frac{v^2}{k^2} = 1 \}$$

أى أن صورته الدائره  $\mathcal{H}$  هي القطع الناقص ؛ طولاً نصفى محوريه هما

$$1, k \text{ ، واختلافه المركزى } = \sqrt{1 - k^2}$$

مثال (٢٦) : أوجد صورته القطع الناقص

$$\mathcal{H} = \{ (s, v) : \frac{(v-2)^2}{9} + \frac{(s-1)^2}{16} = 1 \}$$

بالتحويله التى مصفوفتها هي  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

الحل :

النقطة ( ٤ حنا  $\theta$  ، ١ +  $\theta$  حنا ٣ +  $\theta$  ) ٥

اذن

$$\begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + \theta \\ 1 + \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

أى أن :

$$\begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + \theta \\ 1 + \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

وبالتالى :

$$s = 4 + \theta$$

$$\text{ص}' = \frac{3}{2} \text{ جا } \theta + 0$$

بمخذف البارامتر  $\theta$  نجد أن

$$\{ \text{ص}' , \text{س}' \} = \left( \text{ص}' , \text{س}' \right) : \frac{\text{ص}'(1-\text{س}')}{\frac{9}{4}} + \frac{\text{س}'(1-\text{ص}')}{16}$$

و هي تمثل قطع ناقص مركزة هو النقطة  $(1, 1)$  و طولها نصفى محورية هما  $\frac{3}{2}$  ،  $\frac{3}{2}$ .

مثال ٢٧ : أوجد صورة القطع الذائد

$$\{ \text{ص}' , \text{س}' \} = \left( \text{ص}' , \text{س}' \right) : \frac{\text{ص}'}{36} - \frac{\text{س}'}{64}$$

بالتحويل التي مصفوفتها هي  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

الحل :

النقطة  $(8 \text{ قا } \theta , 6 \text{ طا } \theta)$   $\in \mathcal{C}$

اذن :

$$\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \text{ قا } \theta \\ 6 \text{ طا } \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

أى أن :

$$\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \text{ قا } \theta \\ 3 \text{ طا } \theta \end{pmatrix}$$

وبالتالى:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \text{س}^2 = \text{قا}^2 \theta \\ (2) \quad & \text{ص}^2 = \text{طا}^2 \theta \end{aligned}$$

بم حذف البارامتر  $\theta$  من (1) ، (2) ينتج أن :

$$1 = \frac{\text{ص}^2}{9} - \frac{\text{س}^2}{64}$$

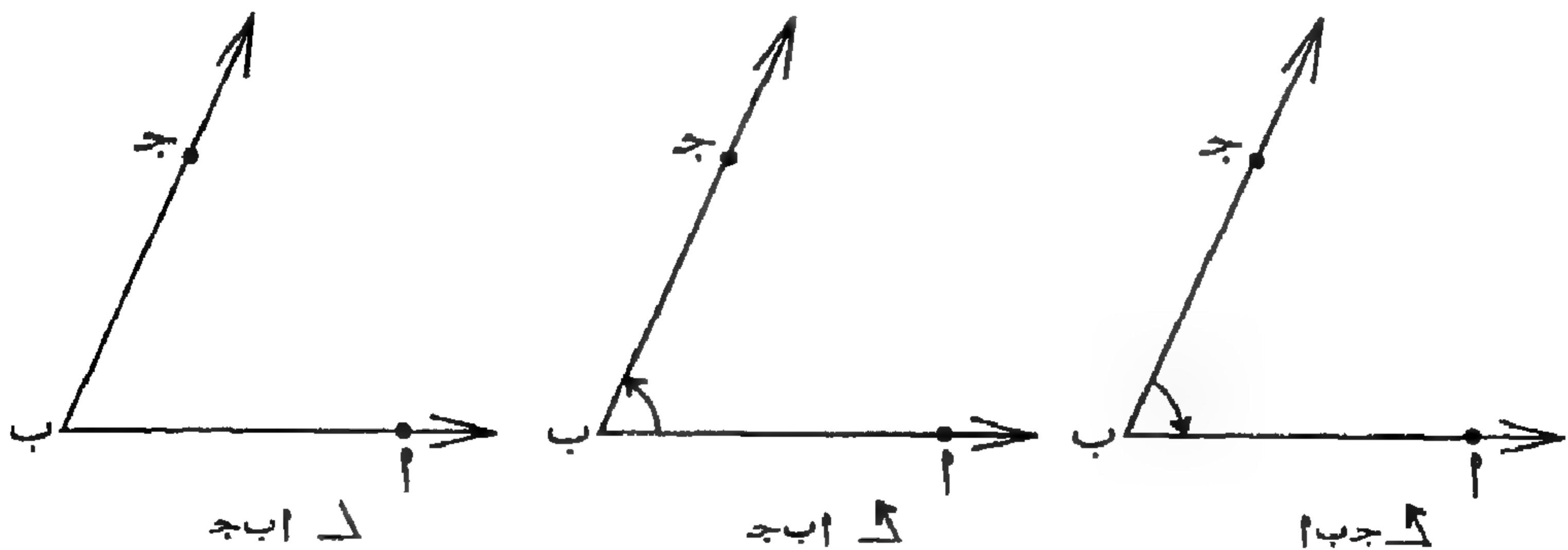
وبالتالى فان :

$$\{ (\text{س}^2, \text{ص}^2) : 1 = \frac{\text{ص}^2}{9} - \frac{\text{س}^2}{64} \}$$

وهى تمثل قطع زائد طولاً نصفى محوريه هما ٨ ، ٣ واختلافه المركزى هو ١٠٠٦٨

٩-١ : الزاويه الموجهه

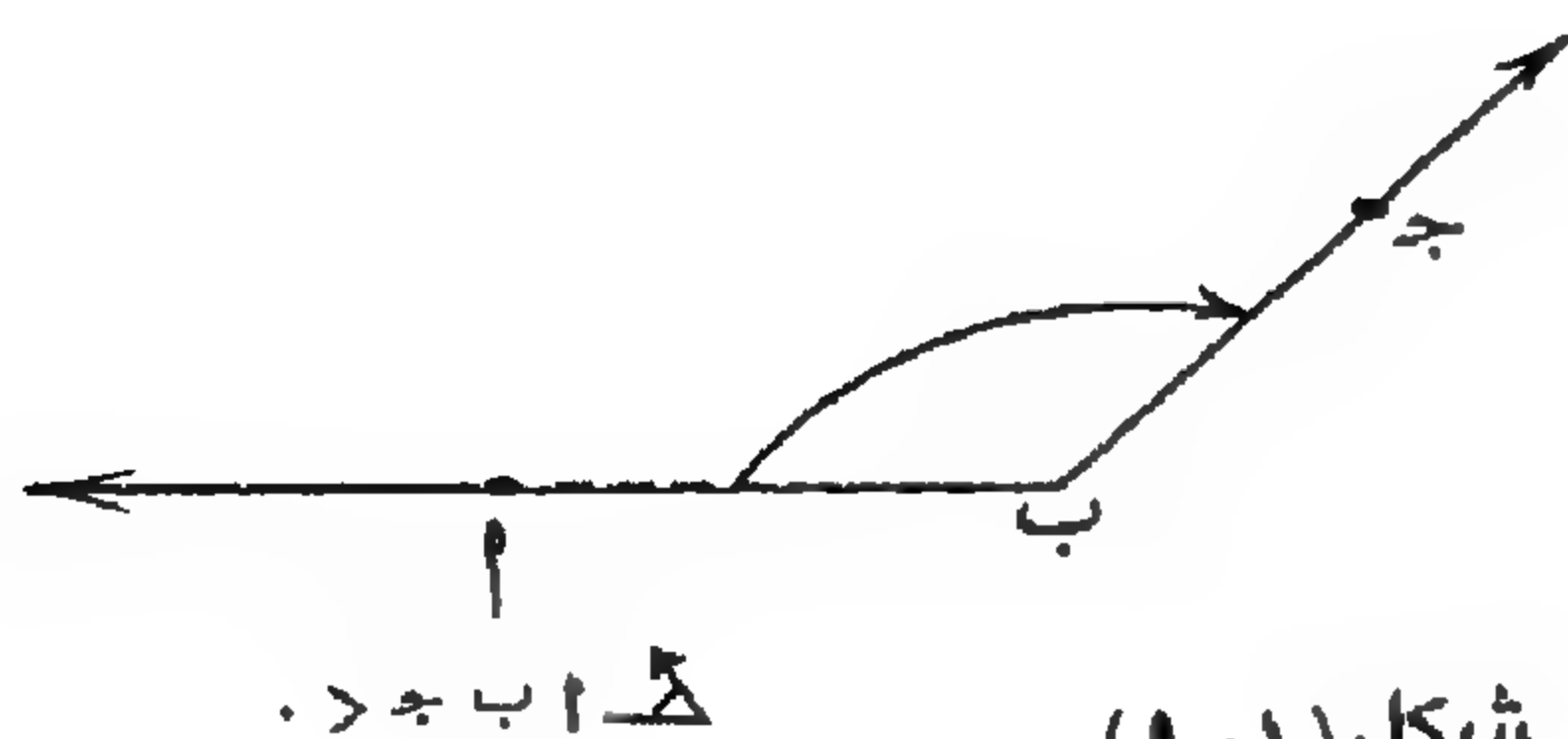
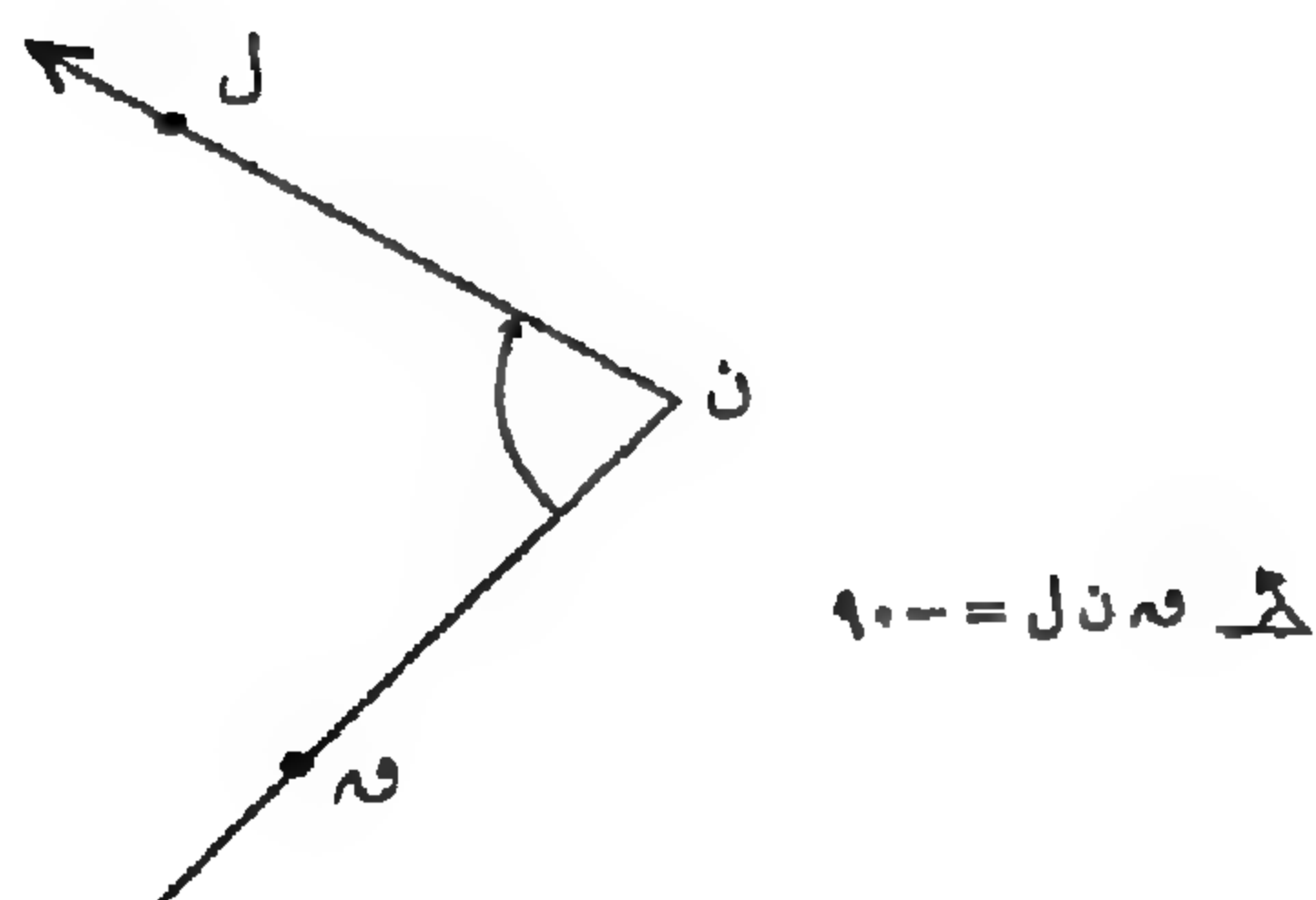
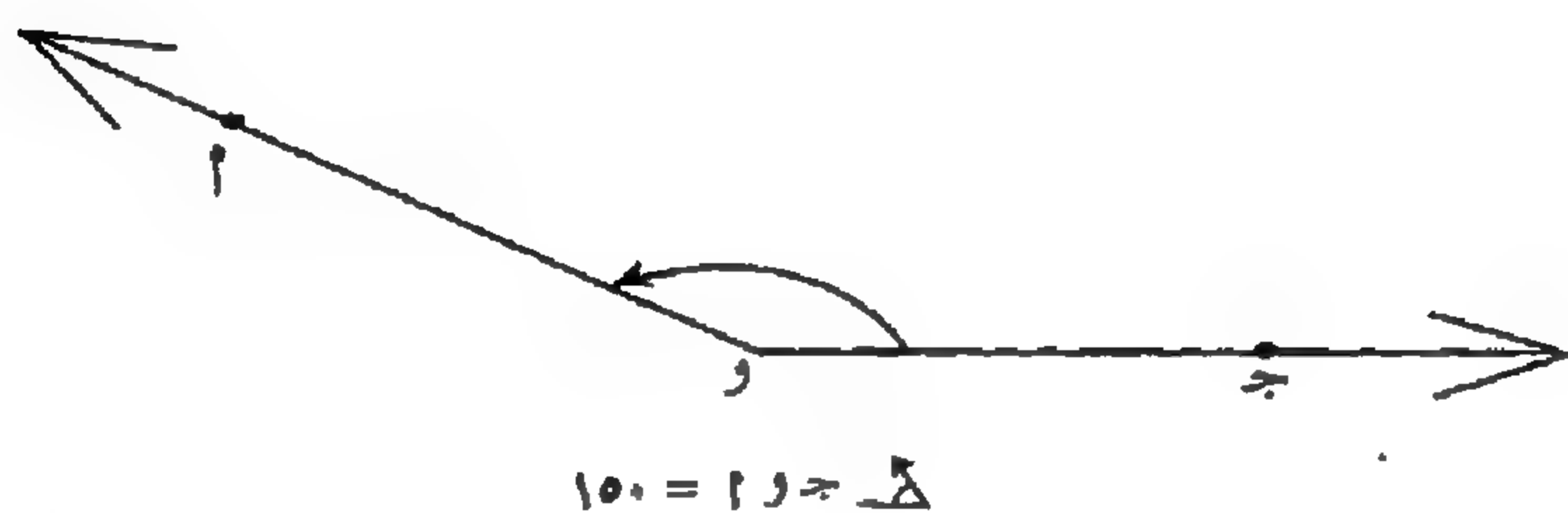
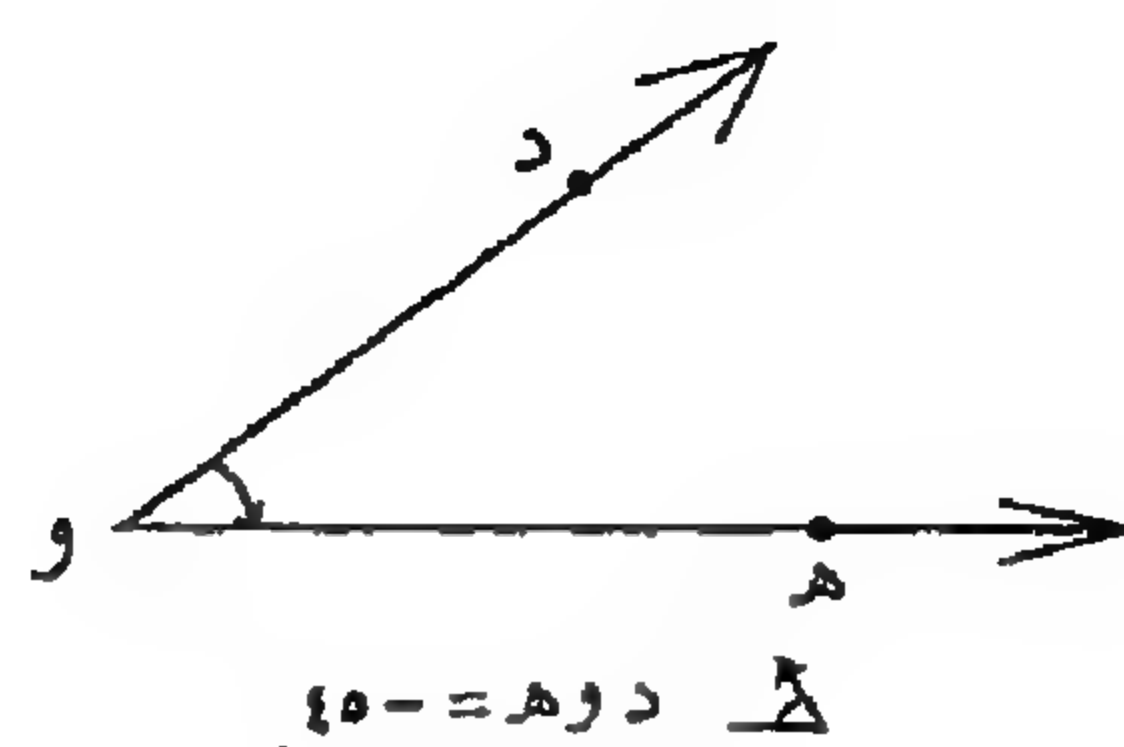
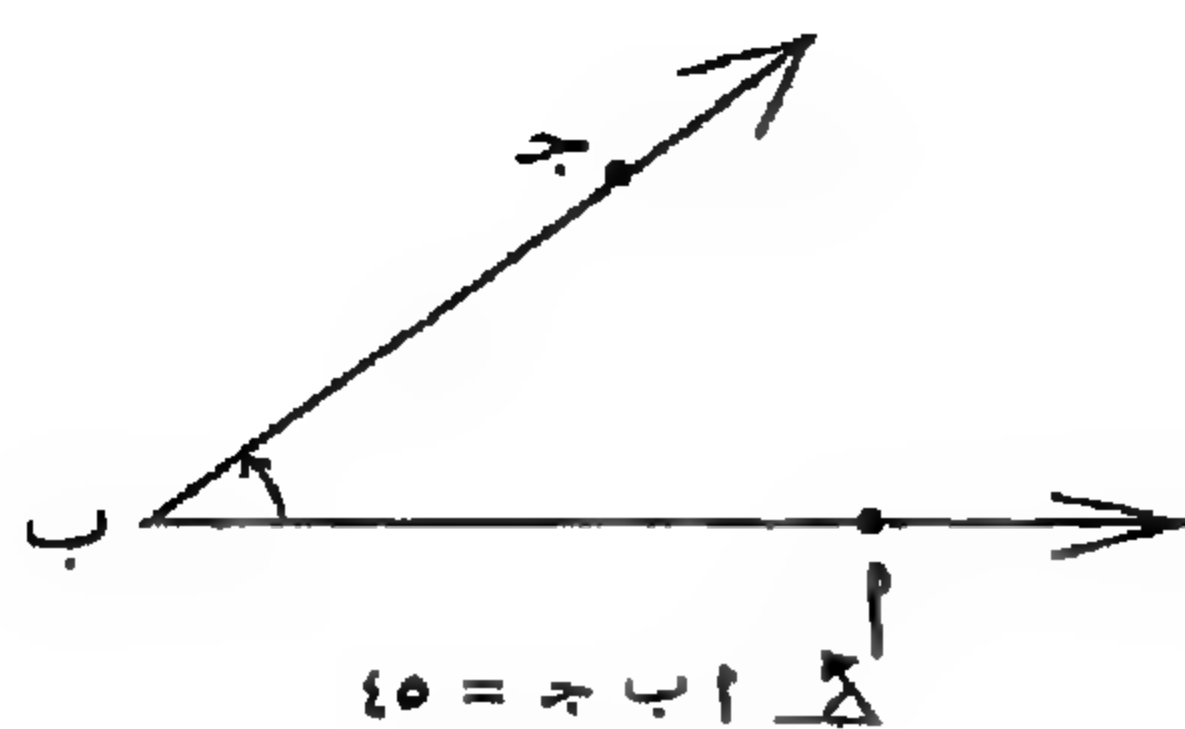
الزاويه الموجهه  $\angle$  ا ب جـ هى الزاويه المكونه من الشعاعين بـ ا ، ب جـ. الشعاع بـ ا يسمى بالجانب الاول بينما الشعاع بـ جـ يسمى بالجانب الثانى .  
اما الزاويه الموجهه  $\angle$  جـ بـ ا فيكون بـ جـ هو الجانب الاول بينما بـ ا هو الجانب الثانى



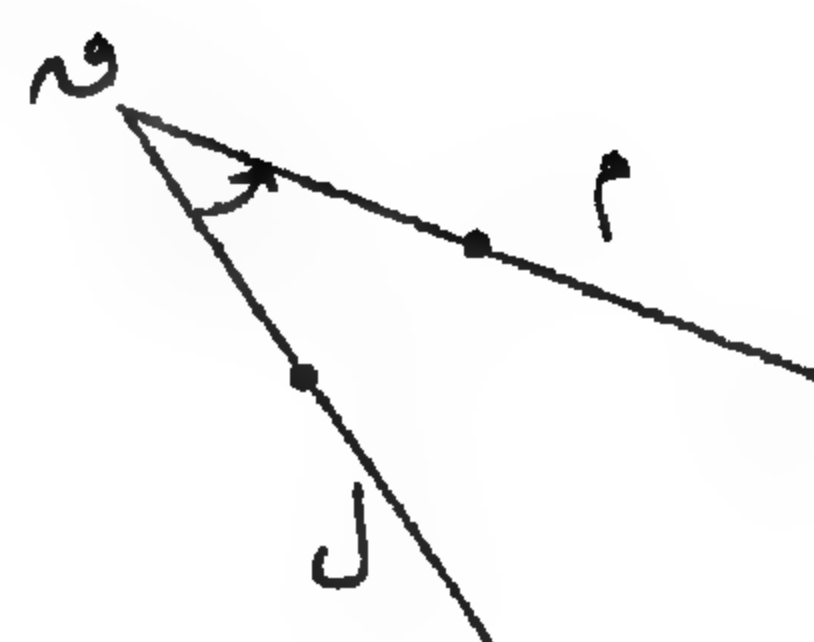
شكل (١-٨)



في دراستنا للهندسة ، علمنا بأن  $\angle$  أ ب ج ( تعني مقياس الزاوية  $\angle$  أ ب ج ) يكون بين صفر ، ١٨٠ .



شكل (١-٩)





زاوية م ن ل < ٩٠

والآن ، نرغب في عمل مشابه بالنسبة للزاويا الموجهه . تبعا لذلك ، فاننا سنضع التعبير التالي :

١-  $\angle \text{أ ب ج} = \angle \text{أ ب ج}$  اذا كان التوجيه للثلاثي (ب أ جـ) ضد عقارب الساعة.

٢-  $\angle \text{أ ب ج} = - \angle \text{أ ب ج}$  اذا كان التوجيه للثلاثي (ب أ جـ) مع عقارب

الساعة.  حيث  $\angle \text{أ ب ج}$  تعنى مقياس الزاويه الموجهه   $\angle \text{أ ب ج}$  لاحظ أن :

اذا كانت  $\angle \text{أ ب ج}$  أى زاوية ، فان  $\angle \text{أ ب ج} = \angle \text{ج ب أ}$  وبالتالي

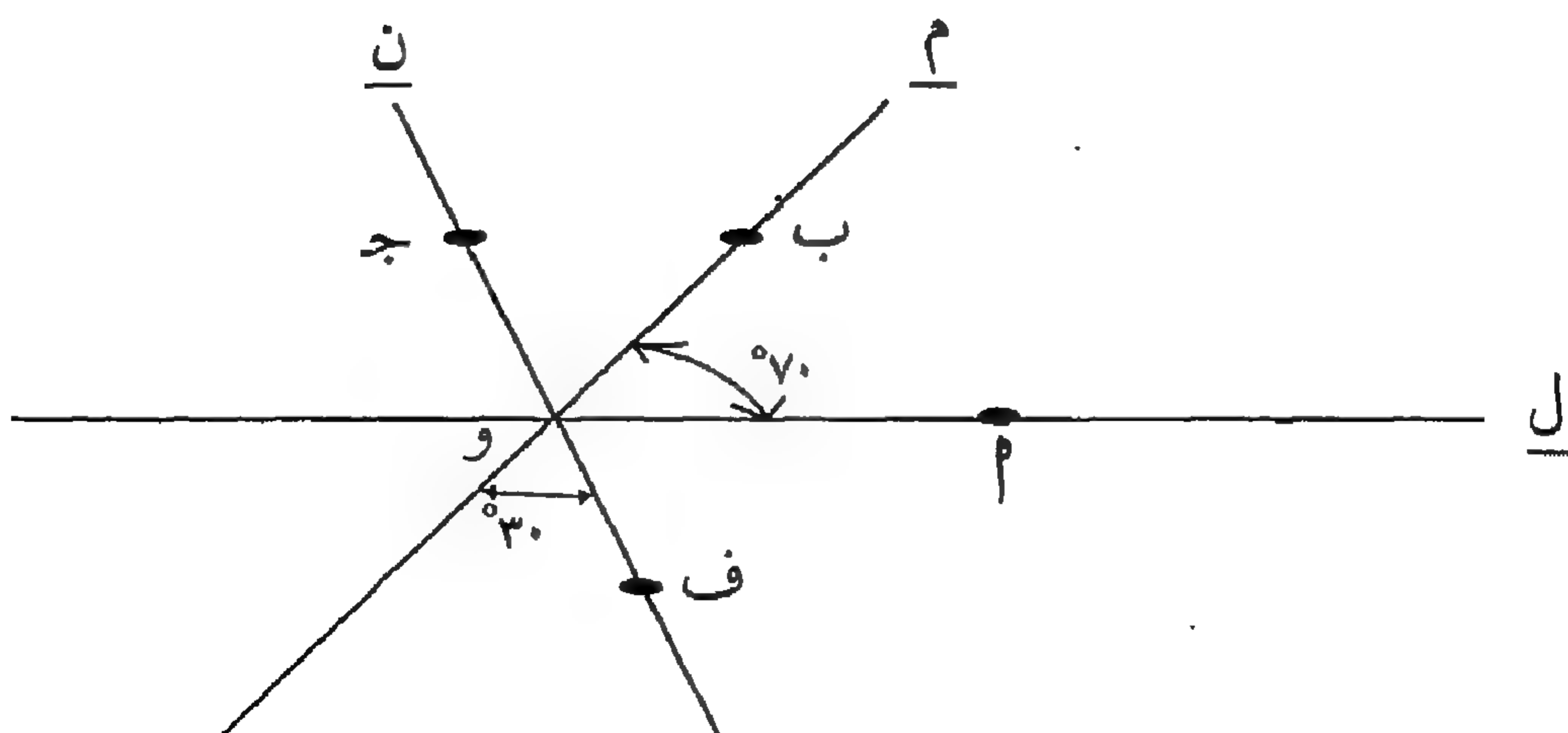
$$\angle \text{أ ب ج} = \angle \text{ج ب أ}$$

لكن بالنسبة للزاويا الموجهه ، فيكون

$$\angle \text{أ ب ج} = - \angle \text{ج ب أ}$$

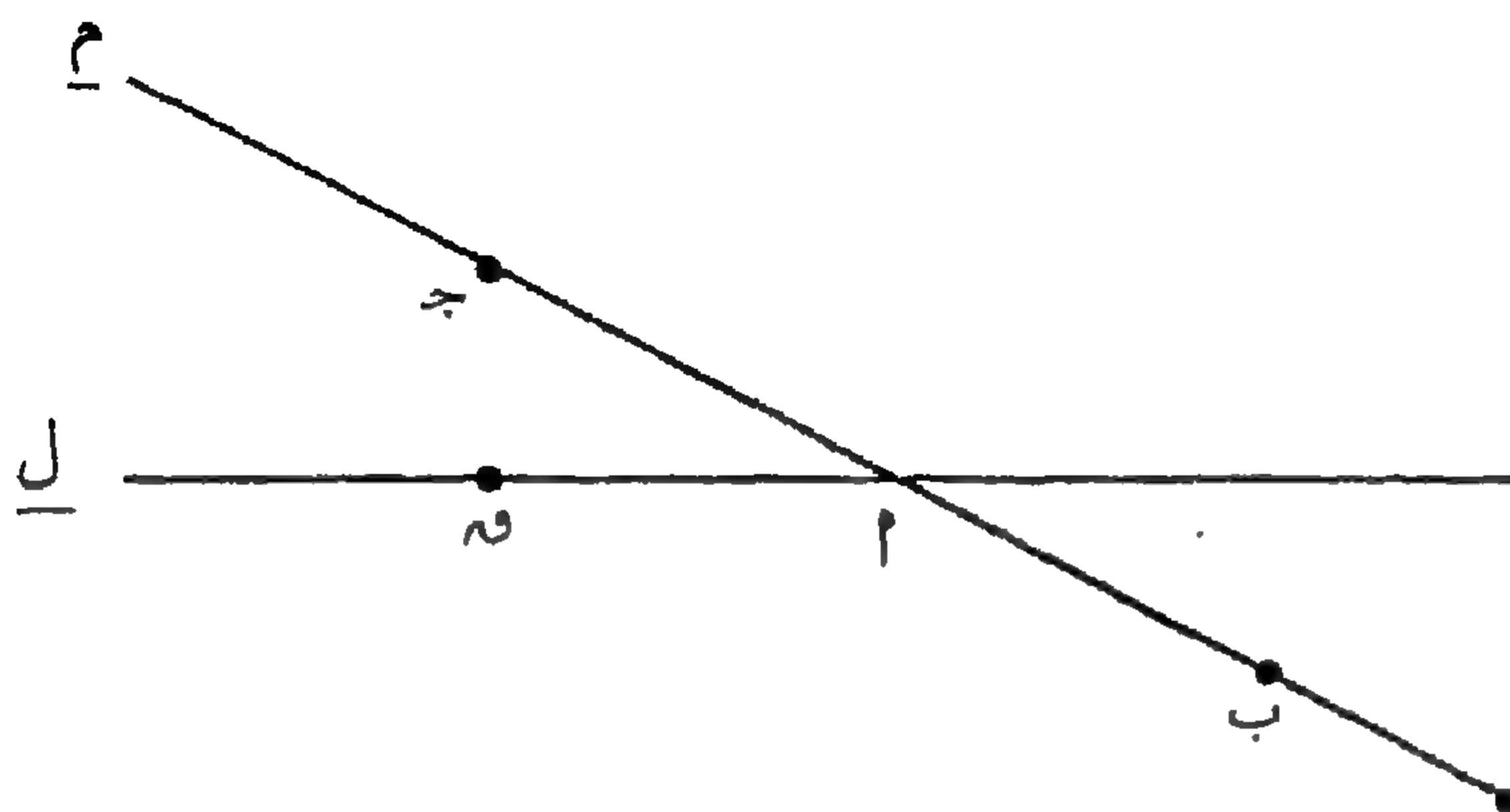
اذا تكلمنا عن مقياس الزاوية بين خطين أو ببساطه عن الزاوية بين خطين ، فاننا نشير للزاوية

الحاده بين الخطوط . ففى شكل (١٠-١) يكون مقياس الزاوية بين  $\underline{\text{ل}}$  ،  $\underline{\text{م}}$  هو  $70^\circ$  ، بينما مقياس الزاوية بين  $\underline{\text{ل}}$  ،  $\underline{\text{ن}}$  يكون  $80^\circ$  .



شكل (١٠-١)

والآن ، لنفرض أن  $\underline{ل}$  يقطع  $\underline{م}$  عند  $أ$  ؛  $ق$  و  $\underline{ل}$  ؛  $ب$  ،  $ح$  و  $\underline{م}$  بحيث أن  $أ$  بين  $ب$  ،  $ح$  .  
 فإذا كانت  $\angle ق أ ب$  حادة ، فإننا نقول أن الزاوية من  $\underline{ل}$  إلى  $\underline{م}$  هي الزاوية الموجهة  $ق أ ب$  .  
 بخلاف ذلك فالزاوية من  $\underline{ل}$  إلى  $\underline{م}$  هي  $\angle ق أ ح$  .



شكل (١-١١)

في شكل (١-١١) ، إذا كانت  $\angle ق أ ب = ١٥٠$  فإن مقياس الزاوية من  $\underline{ل}$  إلى  $\underline{م}$  يكون  $\angle ق أ ح = ٣٠ -$  ، ومقياس الزاوية من  $\underline{م}$  إلى  $\underline{ل}$  هو  $٣٠$  .

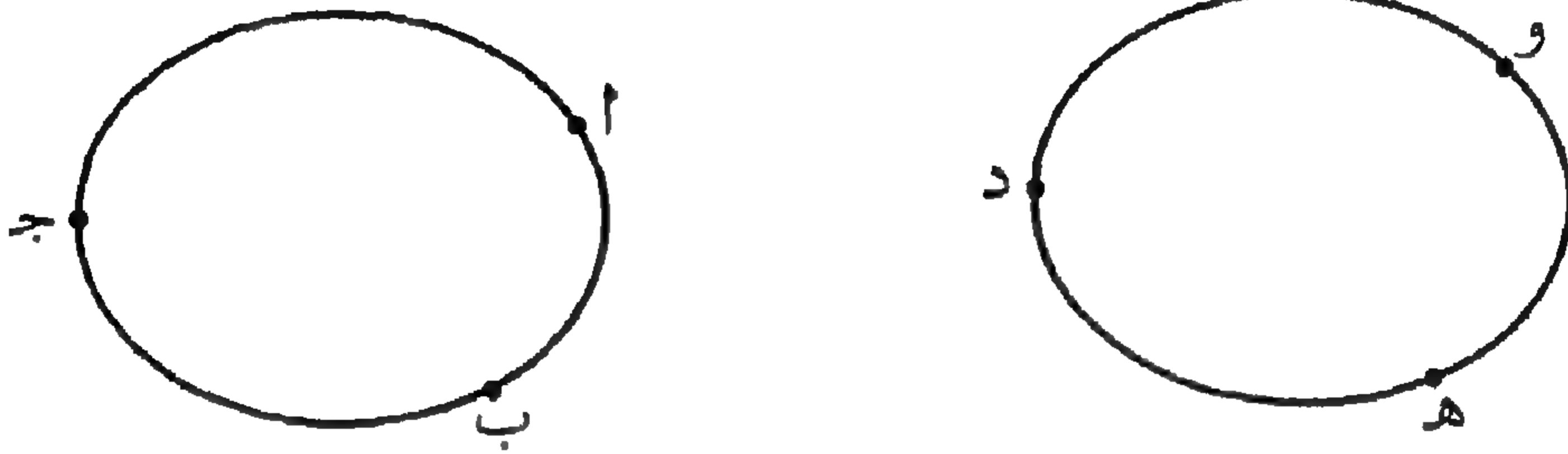
وفي شكل (١-١٠) ، فإننا نلاحظ أن مقياس الزاوية من

- ١-  $\underline{ل}$  إلى  $\underline{م}$  =  $\angle أ و ب = ٧٠$
- ٢-  $\underline{ل}$  إلى  $\underline{ن}$  =  $\angle أ و ف = ٨٠ -$
- ٣-  $\underline{ن}$  إلى  $\underline{م}$  =  $\angle ج و ب = ٣٠ -$

من هذا نستنتج أن مقياس الزاوية من خط الى آخر يأخذ القيمة من -٩٠ الى +٩٠، بينما من المستحب أن نقول أن : الزاوية بين خطين يجب أن يكون مقياسها بين ٠ ، ٩٠ .

#### ١-١٠ : التحويلة المباشرة والمضادة

فيما يلي سنقدم فكره التوجيه لثلاثي مرتب من نقط غير واقعه على استقامه واحده .  
اذا كان ( أ ، ب ، جـ ) ثلاثي مرتب من نقط غير واقعه على استقامه واحده ، فانه يوجد تماماً دائرة واحده هـ ماره بالنقط أ ، ب ، جـ .



شكل (١-١٢)

لنبدأ عند النقطة أ ، ونتحرك على دائره لنقابل النقطة ب ثم جـ . عندئذ نقول أن الثلاثي (أ ، ب ، جـ) له توجيه مع عقارب الساعة . أما اذا تحركنا في اتجاه مضاد لعقارب الساعة ، فاننا نقول أن الثلاثي ( أ ، ب ، جـ ) له توجيه ضد عقارب الساعة .

في شكل (١-١٢) ، الثلاثي ( أ ، ب ، جـ ) له توجيه مع عقارب الساعة ، بينما الثلاثي ( د ، هـ ، و ) له توجيه ضد عقارب الساعة .

يقال لتحويله بأنها حافطة التوجيه اذا لم يتغير التوجيه لصورة ثلاثي مرتب ( أ ، ب ، جـ ) من نقط غير

واقعه على استقامة واحده . خلافاً لذلك ، يقال للتحويلة بأنها تعكس التوجيه .

التحويله تسمى تحويله مباشرة اذا حافظت على التوجيه ، وتسمى تحويله مضاده اذا عكست التوجيه



# ١-١١ : التساوى القياسى

التحويله المستويه **ت** تسمى تساوى قياسى اذا واذا فقط

$$\overline{ق'ك'} = \overline{قك} \quad \vee \quad ق، ك \in \mathcal{H}^2$$

حيث

$$ق' = \mathbf{ت}(ق) ، \quad ك' = \mathbf{ت}(ك) .$$

مثال (٢٨) : الراسم **ت** :  $\mathcal{H}^2 \leftarrow \mathcal{H}^2$  المعرف بالقاعده

$$\mathbf{ت} (س، ص) = (س، -ص) \quad \vee \quad (س، ص) \in \mathcal{H}^2$$

هو تساوى قياس .

من الواضح أن هذا الراسم هو تحويله مستويه (أحادى وفوقى) .

لتكن  $أ (أ_١، أ_٢)$  ،  $ب (ب_١، ب_٢)$  نقط فى المستوى  $\mathcal{H}^2$

اذن صور هذه النقط على التوالى تحت تأثير الراسم **ت** هى :

$$أ' (أ_١ ، -أ_٢) ، \quad ب' (ب_١ ، -ب_٢)$$

من قانون البعد بين نقطتين يتضح أن :

$$\overline{أ'ب'} = \sqrt{ (أ'_١ - ب'_١)^2 + (أ'_٢ - ب'_٢)^2 } =$$

$$= \sqrt{ (أ_١ - ب_١)^2 + (-أ_٢ - (-ب_٢))^2 } =$$

$$= \sqrt{ (أ_١ - ب_١)^2 + (أ_٢ - ب_٢)^2 } = \overline{أب}$$

وبالتالى فان الراسم **ت** هو تساوى قياسى .

## تمارين عامه

١- إذا كانت  $S = [-2, 4)$  ،  $V = (-1, 6)$  ،  $E = (-\infty, 1]$  فأوجد :

(أ)  $S \cup V$  (ب)  $S \cap V$

(ج)  $S - V$  (د)  $V - S$

(هـ)  $S - E$  (و)  $E - S$

(ز)  $S \cup E$  (ط)  $S \cap E$

٢- وضح بالرسم المجموعات التالية ثم اكتب النتيجة في صورته فترة عددية

(أ)  $\{S : S \leq -1\} \cap \{S : -4 > S > 1\}$

(ب)  $\{S : S > 3\} \cap \{S : S \leq 0\}$

(ج)  $\{S : -3 > S \geq 1\} \cap \{S : S < 2\}$

(د)  $\{S : -2 > S \geq 4\} \cup \{S : S > 1\}$

(هـ)  $\{S : -5 \geq S \geq 0\} \cap \{S : -2 > S > 3\}$

(و)  $\{S : S \geq 7\} \cap \{S : S \leq 5\}$

(ز)  $\{S : S \geq 6\} \cup \{S : S < 4\}$

٣- إذا كانت  $E$  هي علاقة على المجموعة  $P \times P$  وكانت  $E$  معرفة على النحو التالي :

$$(s, 1) E (1, v) \Leftrightarrow s + 1 = v + 2$$

أثبت أن : هم علاقة تكافؤ . أوجد فصل التكافؤ [ (٥،٢) ] .

٤- إذا كانت هم هي علاقة تكافؤ على المستوى الاقليدي ح<sup>٢</sup> معرفه كالتالى :

$$(س، ص) هم (ع، ل) \iff س = ع$$

فأثبت أن : هم علاقته تكافؤ على ح<sup>٢</sup> ثم ارسم بعض فصول التكافؤ لها .

٥- إذا كانت **س** مجموعة المستقيمات فى المستوى ، وكانت ع هي علاقة التوازي // المعرفه على **س** بحيث أن

$$س ع ص \iff س // ص أو س = ص$$

هل ع علاقته تكافؤ ؟ علل اجابتك .

٦- أثبت أن الراسم **ر** : (١،٠) ← ح المعرف بالقاعده

$$ر(س) = س^٢ - ١ \text{ أحادى}$$

٧- إذا كانت **س** = ح - {٣} ، **ص** = ح - {١} وكان الراسم

$$ر : س \leftarrow ص \text{ معرفاً بالقاعده}$$

$$ر(س) = \frac{س-٢}{س-٣}$$

فأوجد معكوس الراسم **ر**.

٨- إذا كانت **س** = { ٠، ١±، ٢± } وكان الراسم **ر** : **س** ← ح معرفاً بالقاعده

$$ر(س) = س^٢ + ١$$

فأوجد مدى هذا الراسم **ر**.

٩- إذا كان الراسم **ر** : ح ← ح معرفاً بالقاعده

$$ر(س) = ٨س^٣ - ١$$

فأثبت أن  $\pi$  تناظر أحادي . كذلك أوجد معكوس هذا الراسم .

١٠- حدد نوع الرواسم التالية حيث  $(\pi, \sigma)$   $\pi$  ح  $\sigma$  ح :

(أ)  $\pi(\pi, \sigma) \leftarrow (\pi, -\sigma)$

(ب)  $\pi(\pi, \sigma) \leftarrow (\pi, -\sigma)$

(ج)  $\pi(\pi, \sigma) \leftarrow (\pi, -\sigma)$

(د)  $\pi(\pi, \sigma) \leftarrow (\pi, -\sigma)$

(هـ)  $\pi(\pi, \sigma) \leftarrow (\pi, -\sigma)$

(و)  $\pi(\pi, \sigma) \leftarrow (\pi, -\sigma)$

١١- حدد نوع الرواسم التالية :

(أ)  $\pi \leftarrow \sigma$  حيث  $\pi(\pi) = \frac{1+\sigma}{\sigma}$

(ب)  $\pi \leftarrow \sigma$  حيث  $\pi(\pi) = \sqrt{1+\sigma^2}$

(ج)  $\pi \leftarrow \sigma$  حيث  $\pi(\pi) = \frac{\sqrt{\sigma}}{1-\sigma}$

(د)  $\pi : [-1, 0] \leftarrow \sigma$  حيث  $\pi(\pi) = \sigma - 1$

(هـ)  $\pi : [-1, 1] \leftarrow \sigma$  حيث  $\pi(\pi) = \sigma - 1$

١٢- إذا كان  $\pi : \sigma \leftarrow \pi$  راسماً معرفاً بالقاعده

$\pi(\pi, \sigma) = (\pi, \sigma + 8)$

فأوجد  $\pi^{-1}$  .

١٣- برهن على أن مجموعة جميع الرواسم في المستوى التي على الصورة :

$\pi(\pi, \sigma) = (\pi + \sigma, \sigma + \pi)$  ؛  $\pi, \sigma$  ح

تؤلف زمرة .





١٨- أوجد صورته القطع الزائد

$$D = \{ (s, v) : \frac{(s+3)^2}{4} - \frac{(v-1)^2}{9} = 1 \}$$

بالتحويله التي مصفوفتها هي :  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$

١٩- برهن أن النظام (ع، هـ) يؤلف زمرة . هل الزمرة إبدالية؟

حيث  $E = \{ s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7 \}$  ؛  $V$  (س، ص) يكون

$$s_1(q) = (s, v), s_2(q) = (s, -v), s_3(q) = (-s, v), s_4(q) = (-s, -v)$$

$$s_5(q) = (s, v), s_6(q) = (s, -v), s_7(q) = (-s, v), s_8(q) = (-s, -v)$$

$$s_9(q) = (s, v), s_{10}(q) = (-s, v), s_{11}(q) = (-s, -v), s_{12}(q) = (s, -v)$$



## الباب الثاني

### الانعكاس

٢-١: صورہ النقطة بالانعكاس

تعريف: يقال للنقطة  $ق$ ،  $د ح$  بأنها صورة للنقطة  $ق$   $د ح$  بالانعكاس بالنسبة الى

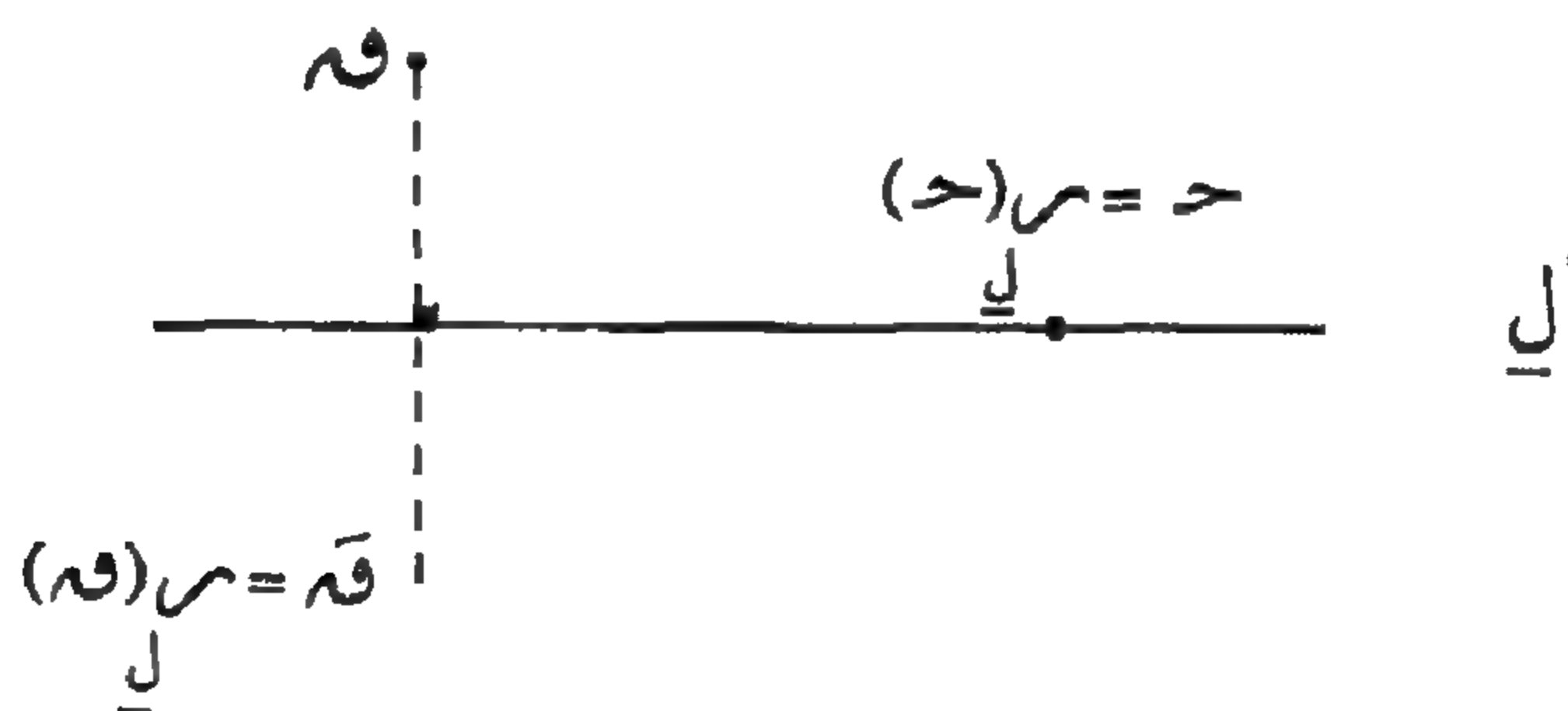
الخط  $ل$   $د ح$  تحت تأثير الراسم  $مر$ :  $ح \rightarrow ح$  اذا كان

١- القطعة المستقيمة  $ق ق'$  عمودية على الخط  $ل$ .

٢- الخط  $ل$  ينصف القطعة المستقيمة  $ق ق'$ .

الخط  $ل$  يسمى محور الانعكاس والراسم  $مر$  يسمى راسم الانعكاس. لاحظ أنه ،

إذا كانت  $ح$   $د ل$ ، فان  $مر(ح) = ح$ . شكل (٢-١).



شكل (٢-١)

مثال (١): أوجد صورة المجموعة

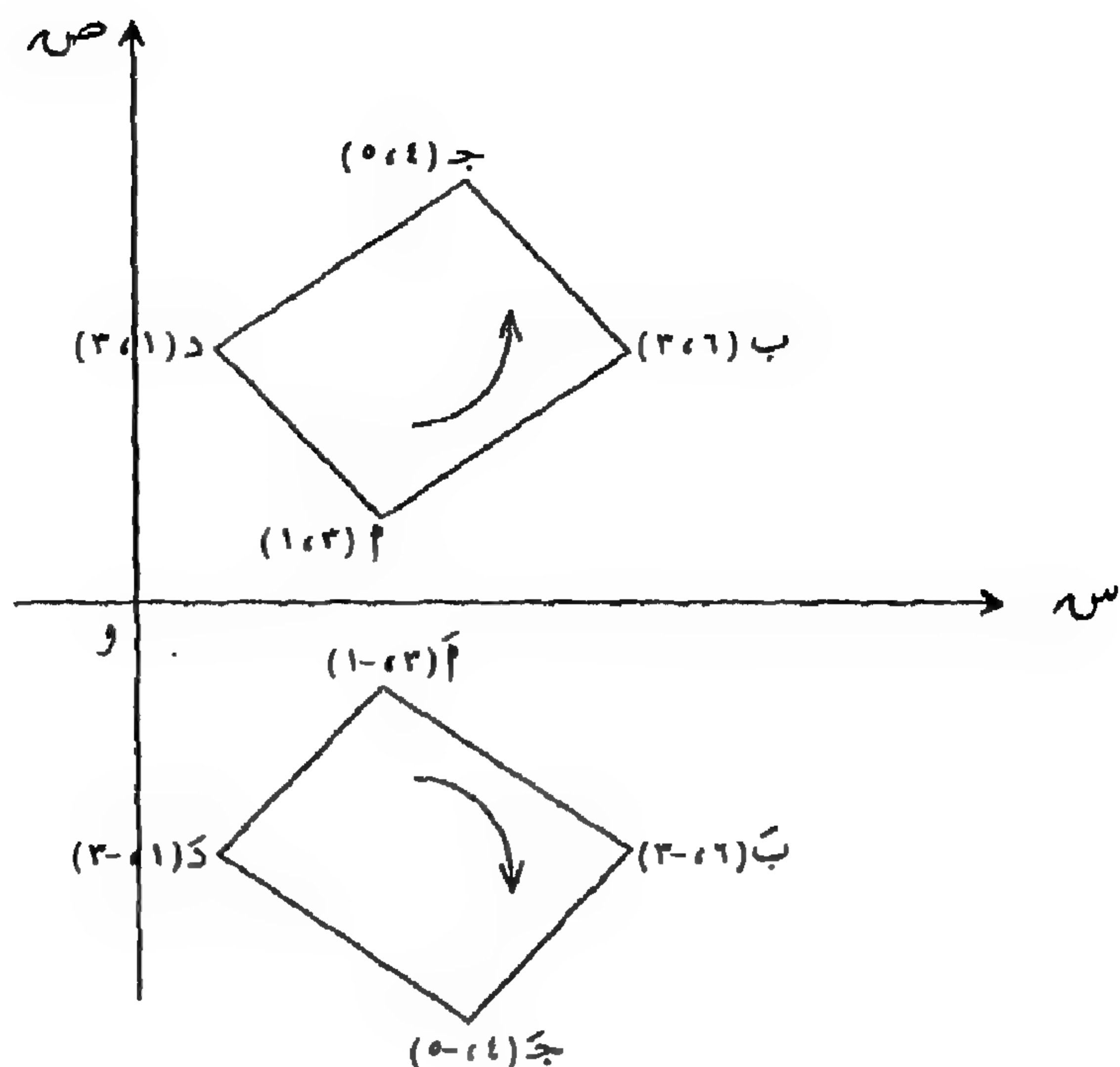
$$ع = \{(1, 3), (3, 6), (5, 4), (3, 1)\}$$

بالانعكاس بالنسبة لمحور السينات.

الحل:

بتطبيق تعريف الانعكاس على المجموعة ع (انظر الشكل (٢-٢)) نحصل على:





شكل (٢-٢)

$$ع = \{ (3, 6), (1, 3), (0, 4), (3, 1) \}$$

وبلغة أخرى ، يمكننا كتابة :

$$\underline{سس} (1, 3) = (1, -3)$$

$$\underline{سس} (3, 6) = (3, -6)$$

$$\underline{سس} (0, 4) = (0, -4)$$

$$\underline{سس} (3, 1) = (3, -1)$$

ملاحظة (١) : لو نظرنا الى المثال السابق ، فاننا نستطيع القول بأن : راسم

الانعكاس بالنسبة لمحور السنيات  $\underline{سس} : ح^2 \leftarrow ح^2$

يمكن تعريف قاعدته كالتالى :

$$\underline{سس} (س, ص) = (س, -ص) \quad \vee (س, ص) \in ح^2$$

ولقد أثبتنا في مثال (٢٨) بالباب الأول ، أن هذا الراسم هو تحويله هندسية (مستويه ) ، كما أنه تساوى قياسى . وهذا يظهر تماماً من الشكل (٢-٢) حيث نرى أن :

$$\overline{أ ب} = \overline{ب' ب} ، \overline{ب' ب} = \overline{ج ب} ، \overline{ج ب} = \overline{ج د} ، \overline{ج د} = \overline{د أ} = \overline{أ} .$$

مثال (٢) : اذا كانت أ (٣، ١) ، ب (٢-، ١-) نقط معطاه ، فأوجد معادله الخط ل

بحيث أن س ( أ ) = ب

الحل :

لايجاد معادله الخط ل ( محور الانعكاس ) نتبع مايتأتى :

منتصف القطعة المستقيمة أ ب هو النقطة (  $1 - \frac{1}{2}$  ، ١ )

$$\text{ميل الخط أ ب} = \frac{1 - 3}{1 - 2} = \frac{2}{1}$$

$$\text{أذن ، ميل الخط ل} = - \frac{3}{2}$$

بالتالى ، فان معادله الخط ل : ص - ١ =  $\frac{3}{2} ( س + \frac{1}{2} )$

أى

$$٦س + ٨ص - ٥ = ٠$$

وبلغه أخرى نكتب :

$$\underline{ل} = \{ (س، ص) : ٦س + ٨ص - ٥ = ٠ \}$$

مثال (٣) : لتكن ق (س، ص) د ح<sup>٢</sup> ، س (ق) = ق' .

أوجد ق ( س' ، ص' ) إذا كان :

$$١ - \underline{ل} = \{ (س، ص) : ص = ب \}$$

$$٢- \underline{ل} = \{ (س، ص) : س = أ \}$$

$$٣- \underline{ل} = \{ (س، ص) : ص = س \}$$

$$٤- \underline{ل} = \{ (س، ص) : ص = -س \}$$

حيث أ ، ب دح .

الحل :

١ - لنفرض أن ق' (س' ، ص') دح<sup>٢</sup> ، ك هي منتصف القطعة المستقيمة ق ق' .

$$\text{إحداثيات ك هي } \left( \frac{ص + ص'}{٢} , \frac{س + س'}{٢} \right)$$

من تعريف الانعكاس نجد أن :

$$س = س'$$

اذن احداثيات ك هي

$$\left( \frac{ص + ص'}{٢} , س \right)$$

بما أن ك  $\exists \underline{ل}$  ، فان

$$\frac{ص + ص'}{٢} = ب$$

أى :

$$ص' = ٢ب - ص$$

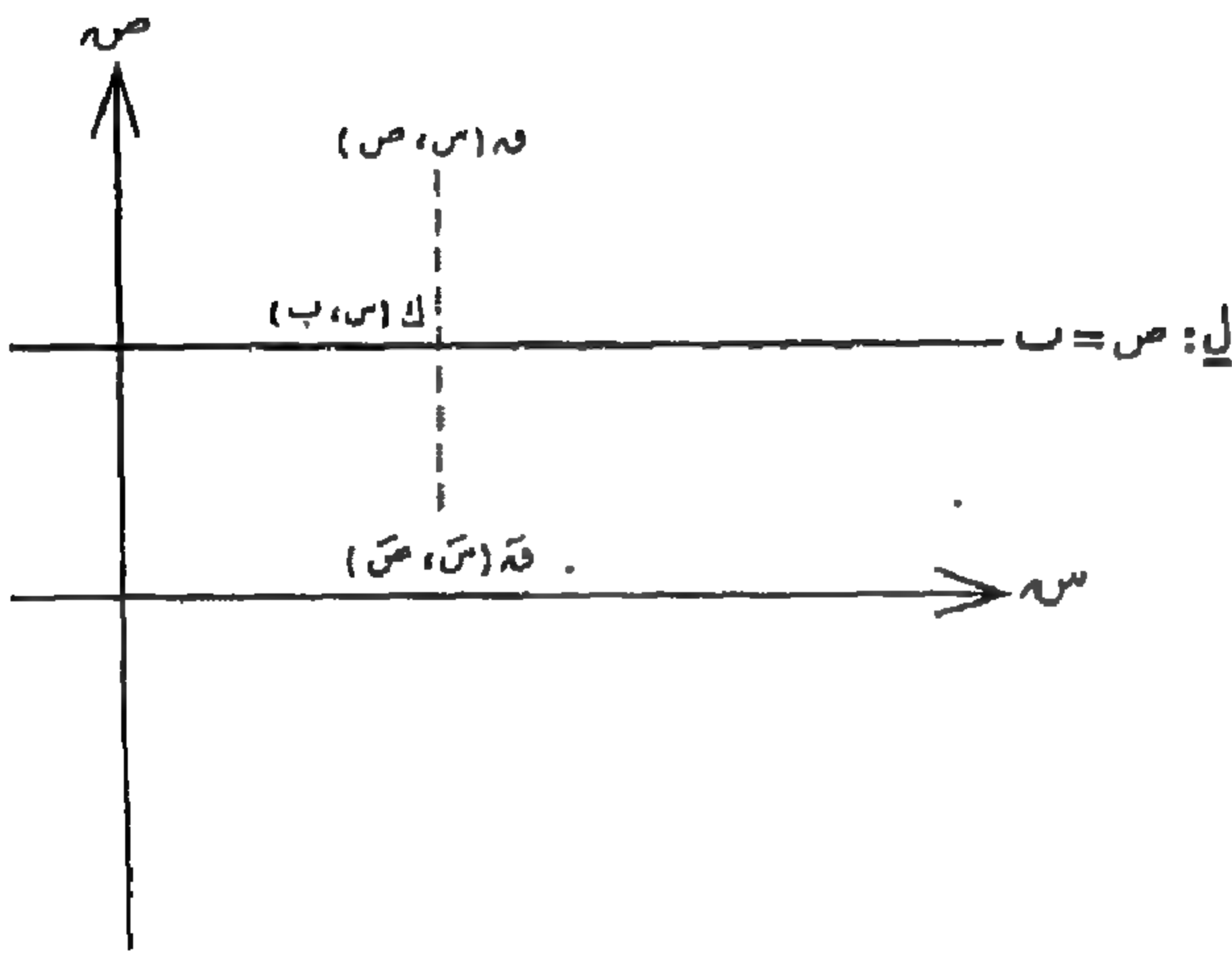
بالتالى فان ق' (س ، ٢ب - ص)

وبعبارة أخرى ، نكتب

$$\underline{س} (س، ص) = (س ، ٢ب - ص)$$

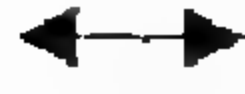
٢- بنفس الطريقة الواردة فى (١) ، نجد أن :

$$\underline{س} (س، ص) = (٢أ - س ، ص)$$



شكل (٢-٣)

٣- لنفرض أن  $ق$  (س، ص) دوح<sup>٢</sup>، ك منتصف القطعة المستقيمة  $ق ق'$ .



ليكن  $م_١$  هو ميل الخط  $ل$ ،  $م_٢$  هو ميل الخط  $ق ق'$ . بالتالي فإن :

$$\frac{ص' - ص}{س' - س} = م_١ ، م_٢ = ١$$



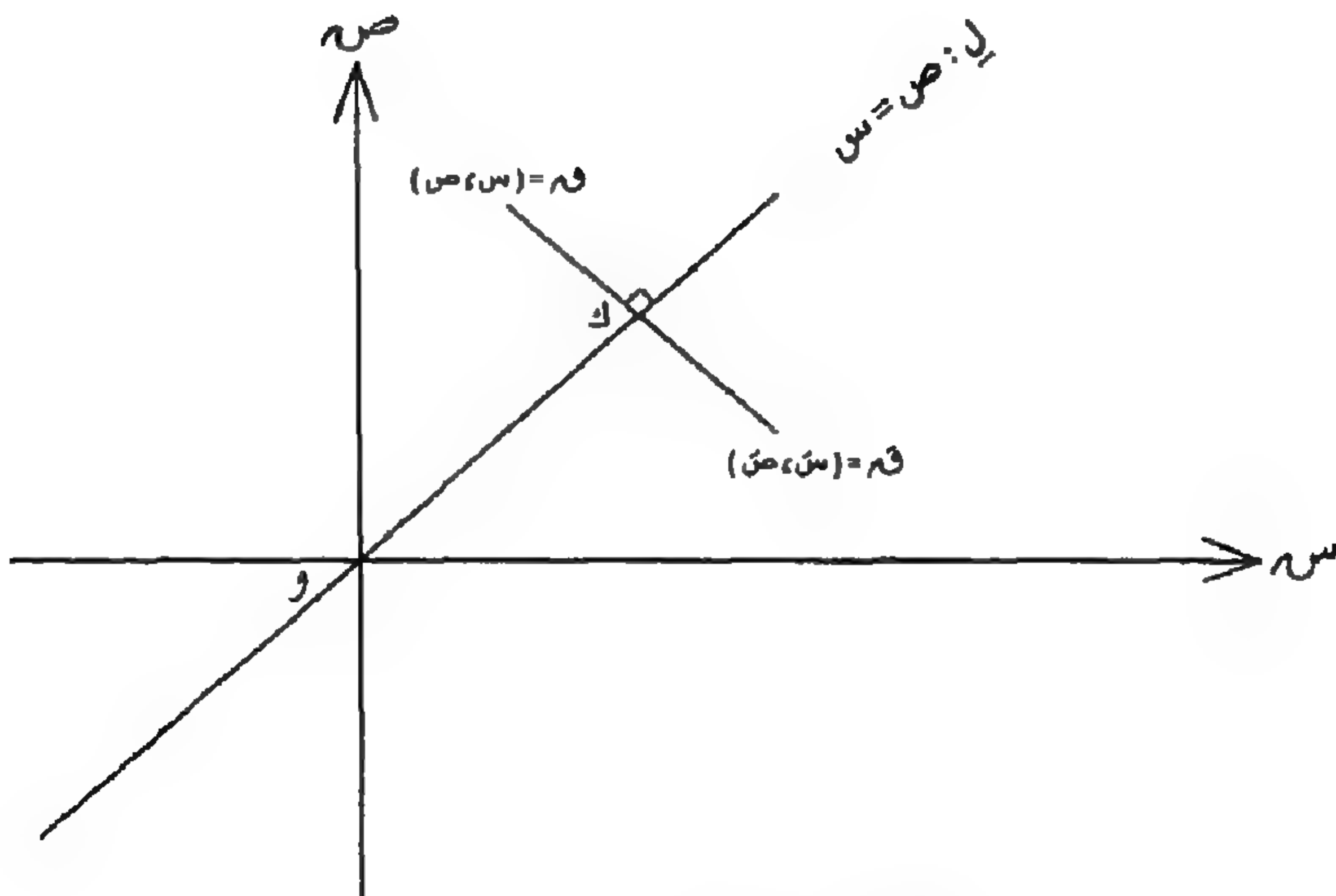
لكن  $ق ق' \perp ل$ .

اذن :

$$١ = ١ \times \left( \frac{ص' - ص}{س' - س} \right) = م_٢ \times م_١$$

أى أن :

$$(i) \quad ص' - ص = س' - س$$



شكل (٢-٤)

ك هي منتصف ق ق' .

اذن إحداثيات ك هي  $(\frac{ص + ص'}{2}, \frac{س + س'}{2})$

لكن ك دل . اذن فهي تحقق المعادلة  $ص = س$  . أى

$$\frac{ص + ص'}{2} = \frac{س + س'}{2}$$

أى

$$(ii) \quad ص + ص' = س + س'$$

من (i) ، (ii) ينتج أن

$$ص = س' , س = ص'$$

وبالتالى فان ق' (ص ، س) .

وبعبارة أخرى ، نكتب

$$س' (س ، ص) = (ص ، س)$$

٤- بنفس الطريقة المتبعه فى (٣) ، نجد أن

$$س' (س ، ص) = (ص ، س - )$$

حيث ل هو محور الأنعكاس الذى معادلته  $ص = س -$  .

\* مثال (٤) : اذا كان

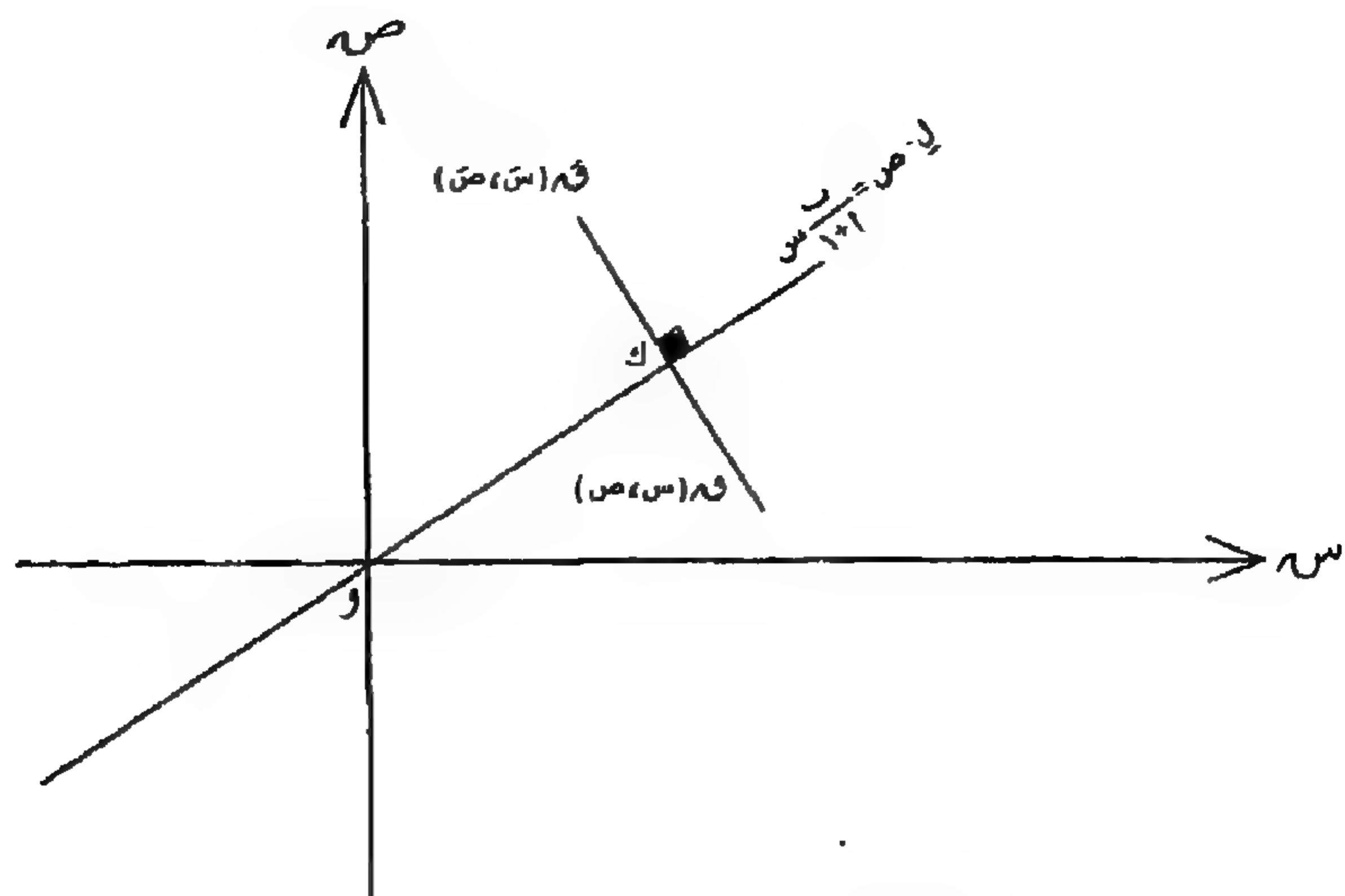
$$ل = \{ (س ، ص) : ص = \frac{ب}{١+أ} س , أ \neq ١ , أ + ب = ١ \}$$

فاثبت أن :

$$س' (س ، ص) = (أ س + ب ص , ب س - أ ص)$$



الحل :



شكل (٢-٥)

ميل الخط  $v = m_1 s = \frac{b}{1+f}$

$$\begin{aligned} \text{ميل الخط } v' &= m_1' = \frac{v' - v}{s' - s} \\ &= \frac{(b - s) - (b + s)}{(1 + f) - (1 + f)} \\ &= \frac{b - s - b - s}{1 + f - 1 - f} \\ &= \frac{-2s}{0} \end{aligned}$$

أذن:

$$\frac{b - s - (b + s)}{(1 + f) - (1 + f)} = \left( \frac{b}{1+f} \right) m_1' = m_1'$$

ای آن

$$\frac{ب' س - ( ۱ + ا' ) ب ص}{ب' س - ( ۱ + ا' ) ب ص} = ۱$$

$$( \text{لأن } ۱ = ب' + ا' )$$

بضرب الطرفين في ( ۱ - ) :

$$\frac{ب' س + ( ۱ + ا' ) ب ص}{ب' س + ( ۱ + ا' ) ب ص} = ۱$$

بالتالي فإن :

$$۱ = ب' س$$

وهذا يعني أن :

$$۱ = ب' س$$

ولتحقيق شرط الانعكاس الثاني ، نفرض أن ك (س\* ، ص\*) هي منتصف ق ق

$$(I) \quad \frac{س + ا' س + ب ص}{۲} = \frac{س' + س'}{۲} = س'$$

$$(II) \quad \frac{ص + ب س - ا' ص}{۲} = \frac{ص + ص'}{۲} = ص'$$

بضرب (i) في  $\frac{ب}{۱ + ا'}$  ينتج أن :

$$\begin{aligned} \frac{ب س + ا' ب س + ب' ص}{( ۱ + ا' ) ۲} &= س' \frac{ب}{۱ + ا'} \\ \frac{ب س + ا' ب س + ب' ص}{( ۱ + ا' ) ۲} &= \\ \frac{ب س ( ۱ - ا' ) - ( ۱ + ا' ) ب ص}{( ۱ + ا' ) ۲} &= \end{aligned}$$

$$\frac{ب س ( ١ + / ) - ( ١ - / ) ص}{( ١ + / ) ٢} =$$

$$= ص'$$

أى أن ك د ل . أى أن الخط ل ينصف القطعة المستقيمة ق ق' .

مثال (٥) : أوجد قاعدة الانعكاس للخط

$$ل = \{(س، ص) : ص = \frac{١}{٣٧} س\} .$$

الحل :

بتطبيق قاعدة الانعكاس الواردة فى مثال (٤) ، نجد أن

$$\frac{١}{٣٧} = \frac{ب}{١ + /}$$

ومنها

$$( i ) \quad ( ١ + / ) \frac{١}{٣٧} = ب$$

وحيث أن

$$( ii ) \quad ١ = ب' + ب$$

فيحل ( i ) ، (ii) للحصول على قيمتى أ ، ب

بالتعويض من ( i ) فى ( ii ) ، نحصل على

$$١ = ( ١ + / ) \frac{١}{٣٧} + ب'$$

أى :

$$ب' = ١ - / + \frac{١}{٣٧}$$

$$ب' = ( ١ + / ) ( ١ - / + \frac{١}{٣٧} )$$

بالتالى :  $\frac{١}{٣٧} = /$  ،  $١ - / = /$  ( هذه القيمه تستبعد )

بالتعويض فى ( i ) عن  $\frac{١}{٣٧} = /$  ينتج أن  $ب = \frac{٣٧}{٢}$

وحيث أن قاعدة الانعكاس هي :

$$\underline{س} (س، ص) \leftarrow (أ س + ب ص - أ ص)$$

اذن :

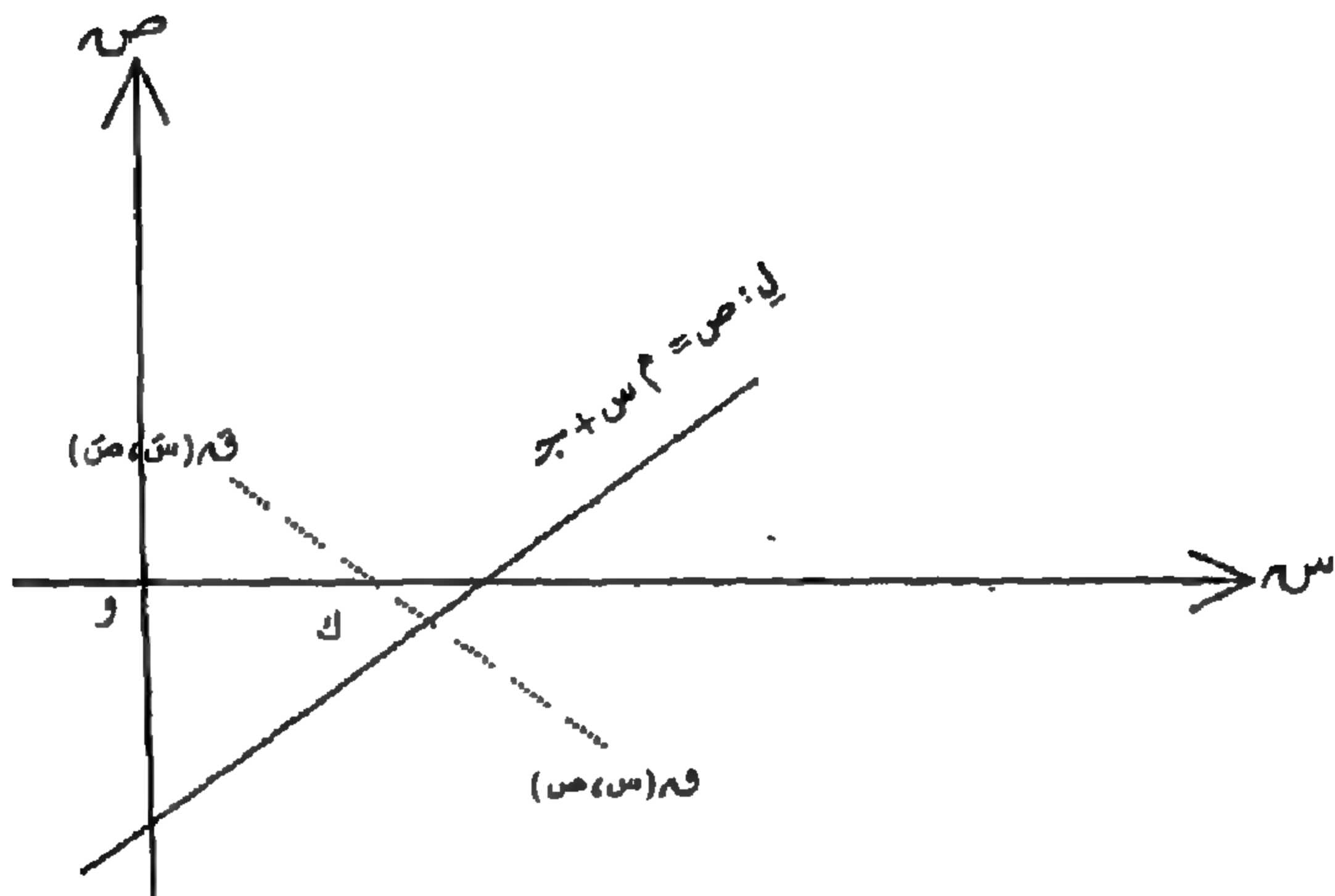
$$\underline{س} (س، ص) \leftarrow \left( \frac{1}{2} س + \frac{\sqrt{3}}{2} ص , \frac{1}{2} س - \frac{\sqrt{3}}{2} ص \right)$$

وهي قاعدة الانعكاس المطلوب للخط  $\underline{ل}$  :  $ص = \frac{1}{\sqrt{3}} س$  .

مثال (٦) : أوجد قاعدة الانعكاس للخط

$$\underline{ل} = \{(س، ص) : ص = م س + ج -\}$$

الحل :



شكل (٢-٦)

لنفرض أن  $ق$ ،  $(س، ص)$  دح<sup>٢</sup> ، ك منتصف القطعة المستقيمة  $ق ق'$  . ليكن م

هو ميل الخط  $\underline{ل}$  ، م\* هو ميل الخط  $\underline{ق ق'}$  . بالتالي فان :

$$م = \frac{ص' - ص}{س' - س}$$

لكن  $ق ق' \perp \underline{ل}$

$$\text{اذن } م \cdot م' = م \left( \frac{ص' - ص}{س' - س} - 1 \right)$$

(i) أي أن  $م(ص' - ص) = س - س'$   
 ك هي منتصف  $QQ'$ .

$$\text{اذن احداثيات ك هي } \left( \frac{ص + ص'}{2}, \frac{س + س'}{2} \right)$$

لكن ك دل . اذن فهي تحقق المعادله  $ص = م س + ج$  . أي

$$ص = \frac{ص + ص'}{2} = م \frac{س + س'}{2} + ج$$

بالضرب في  $(م^2)$  نحصل على

$$م(ص + ص') = م^2(س + س') + 2ج \quad (ii)$$

بطرح (i) من (ii) نجد أن

$$م^2 ص = م^2(س - 1) + س(1 + م^2) + 2ج$$

اذن

$$س' = \frac{1}{م^2 + 1} [ (1 - م^2) س + م^2(ص - ج) ]$$

بالتعويض عن  $س'$  في (i) :

$$م ص' = \frac{1}{1 + م^2} \{ م^2(س - 1) - س(1 + م^2) + م^2(ص - ج) + م^2(1 + م^2) ص \}$$

$$= \frac{1}{1 + م^2} \{ م^2(1 + م^2) ص - م^2(1 + م^2) س + م^2(ص - ج) \}$$

بالقسمة على  $م$  نحصل على



$$\{ \text{ص} + \text{م}^2 \text{ص} + \text{م}^2 \text{س} - \text{ص}^2 + \text{ج} - \text{ص} \} \frac{1}{1 + \text{م}^2} = \text{ص}$$

$$\{ \text{م}^2 \text{ص} - \text{ص} + \text{م}^2 \text{س} + \text{ج} - \text{ص} \} \frac{1}{1 + \text{م}^2} =$$

$$\{ (\text{م}^2 - 1) \text{ص} + \text{م}^2 \text{س} + \text{ج} - \text{ص} \} \frac{1}{1 + \text{م}^2} =$$

أى أن :

$$\text{ق}^2, \frac{1}{1 + \text{م}^2} \{ (\text{م}^2 - 1) \text{س} + \text{م}^2 (\text{ص} - \text{ج}) \}, \frac{1}{1 + \text{م}^2} \{ (\text{م}^2 - 1) \text{ص} + \text{م}^2 \text{س} + \text{ج} - \text{ص} \}$$

وبالتالى تكون قاعدة الانعكاس بالنسبة للخط للمستقيم ل :  $\text{ص} = \text{م}^2 \text{س} + \text{ج} - \text{ص}$  هي

$$\text{س}^2 (\text{س}, \text{ص}) = \frac{1}{1 + \text{م}^2} \{ (\text{م}^2 - 1) \text{س} + \text{م}^2 (\text{ص} - \text{ج}) \}, \frac{1}{1 + \text{م}^2} \{ (\text{م}^2 - 1) \text{ص} + \text{م}^2 \text{س} + \text{ج} - \text{ص} \}$$

نظرية (١) : الانعكاس تساوى قياسى .

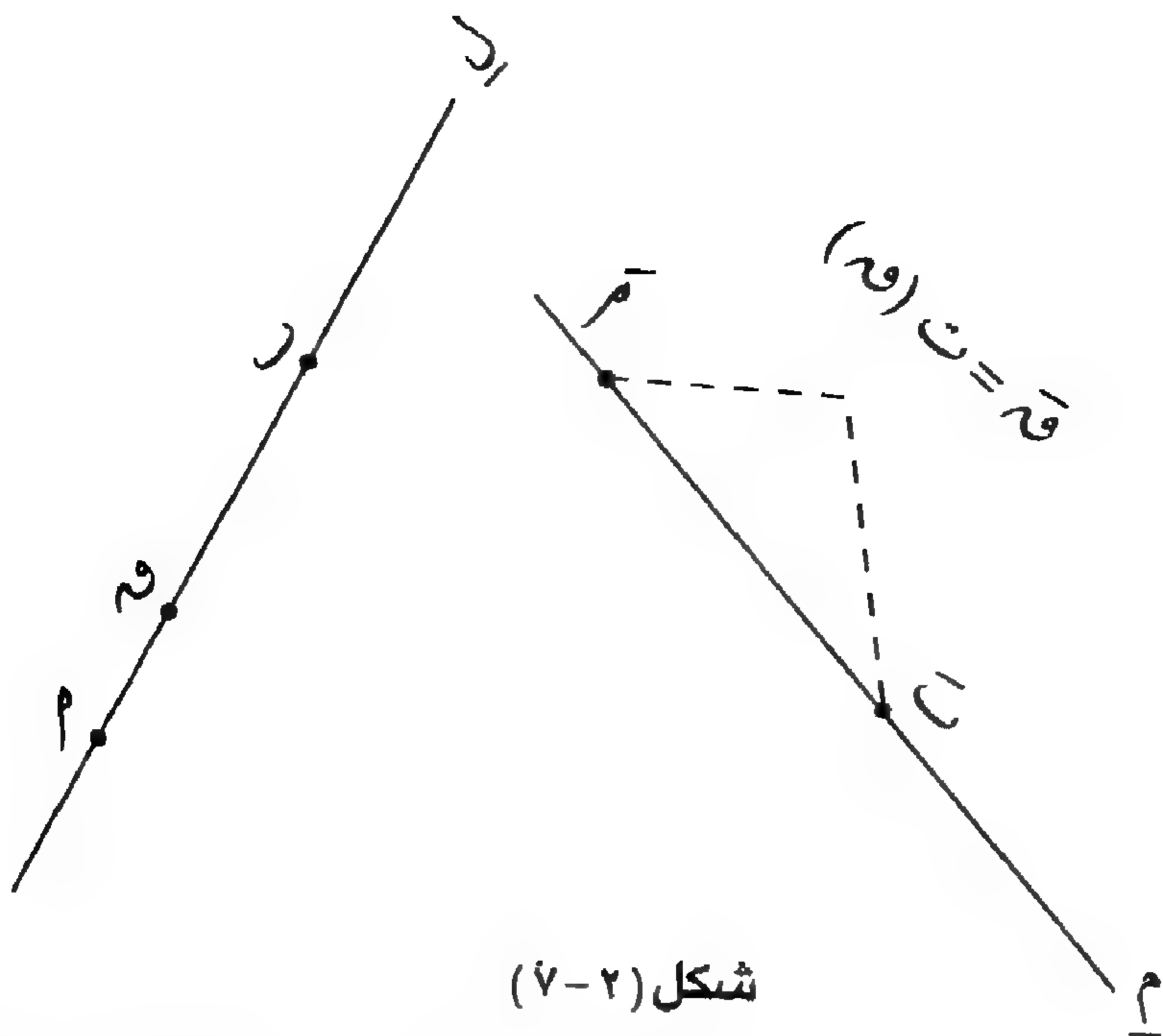
البرهان متروك كتمرين

نظرية (٢) : إذا كان ت تساوى قياسى ، ل د ح<sup>٢</sup> ، فان ل = ت (ل) يكون خطأ فى المستوى ح<sup>٢</sup> .

البرهان : دعنا أولاً ندخل الخط م ونثبت أن ل = م . أى انه يجب علينا اثبات أن :

$$\text{ل} = \text{م}, \text{م} = \text{ل}$$

نحن نحصل على الخط م وذلك بوضع نقطتين أ، ب د ل وبأخذ م كنخط مار بصور كل من أ ، ب تحت تأثير ت . بالتالى فان م = أ' ب' .



حيث أن  $\underline{ل}$  هي مجموعة جميع صور النقط الواقعة على  $\underline{ل}$  ، فانه يمكننا برهان أن  $\underline{ل} \supset \underline{م}$  وذلك بأخذ أى نقطه  $\underline{ق}$  و  $\underline{ل}$  وإثبات أن  $\underline{ق} \in \underline{م}$  (حيث  $\underline{ق}$ ، صور  $\underline{ق}$  تحت تأثيرت) .

إذا فرضنا أن  $\underline{ق}$  بين  $\underline{أ}$ ،  $\underline{ب}$  ؛ فان  $\overline{\underline{أ}\underline{ق}} + \overline{\underline{ق}\underline{ب}} = \overline{\underline{أ}\underline{ب}}$  .  
حيث أن  $\underline{ت}$  تساوى قياسى ، فان

$\overline{\underline{أ}\underline{ق}} + \overline{\underline{ق}\underline{ب}} = \overline{\underline{أ}\underline{ب}}$   
إذا كانت  $\underline{ق} \notin \underline{م}$  ، فانه يوجد المثلث  $\underline{أ}\underline{ق}\underline{ب}$  الذى فيه :

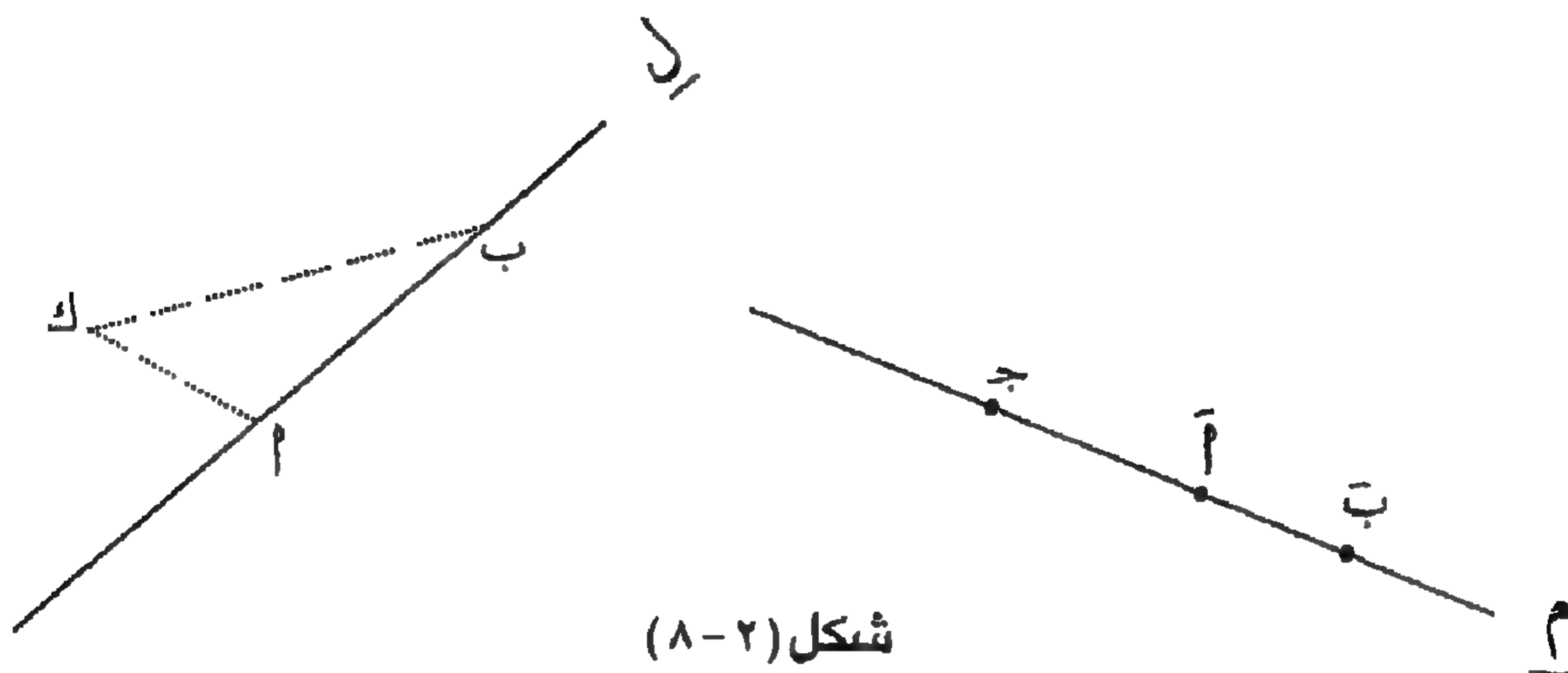
$\overline{\underline{أ}\underline{ق}} + \overline{\underline{ق}\underline{ب}} < \overline{\underline{أ}\underline{ب}}$   
(من المتباينة المثلثية)

من هذا التعارض نستنتج أن  $\underline{ق} \in \underline{م}$  اذا وقعت  $\underline{ق}$  بين  $\underline{أ}$ ،  $\underline{ب}$  . بالتالى فان  $\underline{ل} \supset \underline{م}$

الآن ، سنثبت أن  $\underline{م} \supset \underline{ل}$  .

نفرض أن  $\underline{ج} \supset \underline{م}$  . المطلوب اثبات أن  $\underline{ج}$  هي صورة لنقطه على الخط  $\underline{ل}$  ، أى

اثبات أن  $\underline{ج} \supset \underline{د} \supset \underline{ل}$  .



بما أن  $\underline{ت}$  تساوى قياسى ،  $\underline{ت}$  تحويله مستويه (هندسيه) . إذن توجد نقطه  $\underline{ك}$  بحيث أن  $\underline{ت}(\underline{ك}) = \underline{ج}$  .

إذا فرضنا أن  $\underline{ك} \not\supset \underline{ل}$  ، فانه يوجد المثلث  $\underline{أ ك ب}$  .

باستخدام حقيقة أن :  
 $\underline{أ ك} = \underline{أ ج}$  ،  $\underline{ك ب} = \underline{ج ب}$  ،  $\underline{أ ب} = \underline{أ ب}$

وكذلك نستخدم المتباينة المثلثية ، فاننا نحصل مرة أخرى على تعارض ، نستنتج منه أن  $\underline{ك} \supset \underline{ل}$  . وبالتالي فان  $\underline{ج} \supset \underline{د} \supset \underline{ل}$  . ومن ثم نكون قد أثبتنا أن صورة الخط  $\underline{ل}$  تحت تأثير تساوى قياسى هو خط .

نظرية (٣) : اذا كان ت تساوى قياسى ، فان  
 $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$

البرهان :

بما أن ت تساوى قياسى ، فان  
 $\overline{AB} = \overline{A'B'}$  ،  $\overline{AC} = \overline{A'C'}$  ،  $\overline{BC} = \overline{B'C'}$

اذن : المثلثان  $\triangle ABC$  ،  $\triangle A'B'C'$  متطابقان .

من هذا ينتج أن :

$$\triangle ABC = \triangle A'B'C' .$$

نتيجه : اذا كان ت تساوى قياسى ، فان

$$\underline{L} \perp \underline{M} \quad \underline{L} \perp \underline{M} \quad \underline{L} \perp \underline{M} \quad \underline{L} \perp \underline{M} .$$

حيث

$$\underline{L} = \text{ت}(\underline{L}) ، \underline{M} = \text{ت}(\underline{M}) ، \perp \text{علاقة التعامد} .$$

نظرية (٤) : اذا كان ت تساوى قياسى ، فان

$$\underline{L} \parallel \underline{M} \Leftrightarrow \underline{L} \parallel \underline{M}$$

حيث

$$\underline{L} = \text{ت}(\underline{L}) ، \underline{M} = \text{ت}(\underline{M}) ، \parallel \text{علاقه التوازي} .$$

البرهان :

أولا ، نفرض أن  $\underline{L} \parallel \underline{M}$  . إذا كان  $\underline{L}$  لا يوازي  $\underline{M}$  ، فانه يوجد نقطه أ

بحيث أن أ د  $\underline{L}$  ، أ د  $\underline{M}$  . وهذا يؤدي الى وجود النقط ق د  $\underline{L}$  ، ك د  $\underline{M}$  بحيث أن

ت (ق) = أ ، ت (ك) = أ

وحيث أن  $\underline{ل} // \underline{م}$  ، فإن  $\underline{ق} \neq \underline{ك}$  . لكن هذا يعنى أن  $\underline{ت}$  لا تكون تساوى قياسى .

من هذا التعارض ، نستنتج  $\underline{ل} // \underline{م}$  .

برهان الحالة  $\underline{ل} // \underline{م}$   $\Leftarrow \underline{ل} // \underline{م}$  يترك كتمرين .

مثال (٧) : إذا كان  $\underline{ل} = \{ (س،ص) : ص = -س \}$  ،

$\underline{م} = \{ (س،ص) : ص = ٢س - ٣ \}$

فأوجد معادله الخط  $\underline{م} = س$  (  $\underline{م}$  ) .

الحل :

النقطتان أ (  $٠ ، \frac{٣}{٢}$  ) ، ب (  $٠ ، -٣$  ) واقعتان على الخط  $\underline{م}$  .

حيث أن

$س = (س،ص) = (-ص، -س)$   $\vee (س،ص) \ni ح$

اذن :

$س = (٠ ، \frac{٣}{٢}) = (٠ ، -٣)$

$س = (٠ ، ٣) = (-٣ ، ٠)$

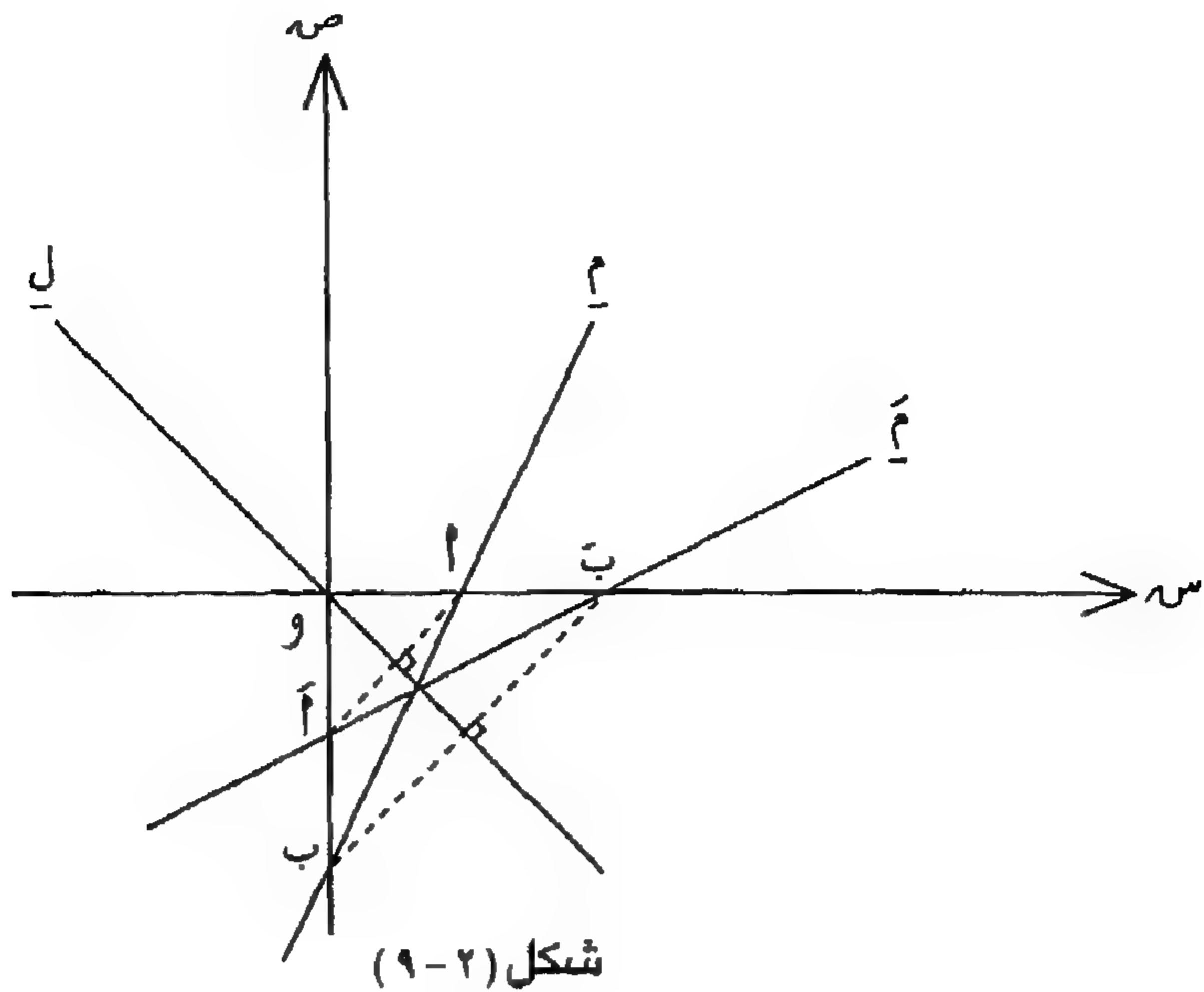
اذن معادله الخط  $\underline{م}$  هى :

$$\frac{\frac{٣}{٢}}{٠} = \frac{ص}{س}$$

$$\frac{\frac{٣}{٢}}{\frac{٣}{٢}} = \frac{ص}{٣}$$

$$\frac{٣}{٢} = \frac{ص}{٢}$$

أى



ملاحظه (٢) : اذا كانت ب نقطه معطاه ، في تحويله مستويه ، فانه يمكن ايجاد نقطه جـ بحيث أن

$$س(جـ) = ب \text{ كالتالي :}$$

حيث أن في تحويله مستويه ، فانه يوجد  $س^{-1}$  .

بالتالي :

$$(س^{-1} \circ س) (جـ) = (جـ) \text{ س}^{-1} = ((جـ) س) \text{ س}^{-1} = ب$$

لكن

$$(س^{-1} \circ س) (جـ) = (جـ) I = جـ$$

(I هو راسم الوحده)

اذن

$$جـ = س^{-1} ب$$



مثال (٨) : ليكن  $\underline{ل}$  هو المحور السيني ،  $\underline{م} = \{(س،ص) : ص = س\}$  .  
أوجد النقطة  $\underline{ج}$  بحيث أن  $(\underline{س} \circ \underline{م} \circ \underline{س}) = (\underline{ج}) = (٧،٢)$

الحل :

من الملاحظة السابقة نجد أن :

$$\underline{ج} = (\underline{س} \circ \underline{م} \circ \underline{س})^{-1} (٧،٢)$$

$$= (\underline{م}^{-1} \circ \underline{س}^{-1} \circ \underline{س}^{-1}) (٧،٢)$$

(من ملاحظة (٩) بالباب الأول)

$$= (\underline{م} \circ \underline{س} \circ \underline{س}) (٧،٢)$$

(لان  $\underline{م} \circ \underline{س}$  ،  $\underline{س}$  رواسم انعكاس)

$$= \underline{م} (\underline{س} (٧،٢))$$

$$= \underline{م} (٧-،٢) = (٢،٧-)$$

مثال (٩) : إذا كان  $\underline{ل} = \{(س،ص) : ص = ٢س - ٣\}$  ، فأوجد معادلة الخط

$\underline{م} = \underline{س} \circ \underline{م} \circ \underline{س}$  ، حيث  $\underline{م} = \{(س،ص) : ص = ٥س - ٨\}$  .

الحل :

$$\text{لتكن } \underline{ق} = (٠، ٨-) \text{ ، } \underline{ق} = (٠، \frac{1}{5}) \text{ ، } \underline{م} \ni \underline{ق}$$

ولكن من مثال (٦) :

$$\underline{س} (س، ص) = \frac{1}{1 + \frac{1}{م}} (س - ١) + م (ص - ١) ، (م - ١) ص + م س + ١$$

(٢جـ)

اذن:

$$\underline{س} (١ق) = \underline{س} (٨-٠٠) = \frac{1}{٥} (٣٠-٠٠) = (٦-٠٤)$$

وبالتالى فان  $١'ق$  ،  $(٦-٠٤)$ .

ايضاً :

$$\underline{س} (٢ق) = \underline{س} (٠ ، \frac{١}{٥}) = (\frac{٢}{٢٥} ، \frac{٣٦}{٢٥})$$

وبالتالى فان :  $٢'ق$  ،  $(\frac{٢}{٢٥} ، \frac{٣٦}{٢٥})$

معادله الخط  $م'$  الواصل بين النقطتين  $١'ق$  ،  $٢'ق$  هي :

$$\frac{٦ + \frac{٢}{٢٥}}{٤ + \frac{٣٦}{٢٥}} = \frac{٦ + ص}{٤ + س}$$

$$\frac{١٩}{١٧} = \frac{١٥٢}{١٣٦} =$$

أى أن :

$$١٩ س - ١٧ ص = ٢٦$$

اذن

$$\underline{م} = \{ (س، ص) : ١٩ س - ١٧ ص = ٢٦ \}$$

٢-٢ : خواص الانعكاس

مما سبق ، نستطيع ان نجمل خواص الانعكاس كالآتي :

- ١- الانعكاس تحويلة هندسية ( مستوية )
- ٢- الانعكاس تساوى قياسى .
- ٣- الانعكاس يحفظ مقياس الزوايا .
- ٤- الانعكاس تحويلة مضادة (انظر شكل (٢-٢) )
- ٥- الانعكاس يحفظ استقامة النقط ، أى أنه يرسم كل مجموعة من النقط المستقيمة فوق مجموعة من النقط المستقيمة .
- ٦- الانعكاس يحفظ البينية ، أى أنه اذا كانت أ ، ب ، جـ ثلاث نقط على استقامة واحده ، وكانت جـ تقع بين أ ، ب وكانت  $\angle A = \angle A'$  ،  $\angle B = \angle B'$  ،  $\angle C = \angle C'$  فان جـ' تقع بين أ' ، ب' .
- ٧- جميع نقط الخط لـ صوراً لنفسها تحت تأثير راسم الانعكاس  $\sigma_L$  ، فهى تبقى ثابتة .  
وبلغة أخرى ، نقول أن الانعكاس له نقط ثابتة على محور الانعكاس .

مثال (۱۰) : اذا كانت أ ، ب نقطتين في جھ واحده من خط ل ، فأوجد نقطه ج — دل  
بحيث يكون أ ج + ج ب أصغر ما يمكن .

**الحل :**

نقراض أن :  $(b) = b^1$

فاذا كانت في احدى نقط ل ، فان

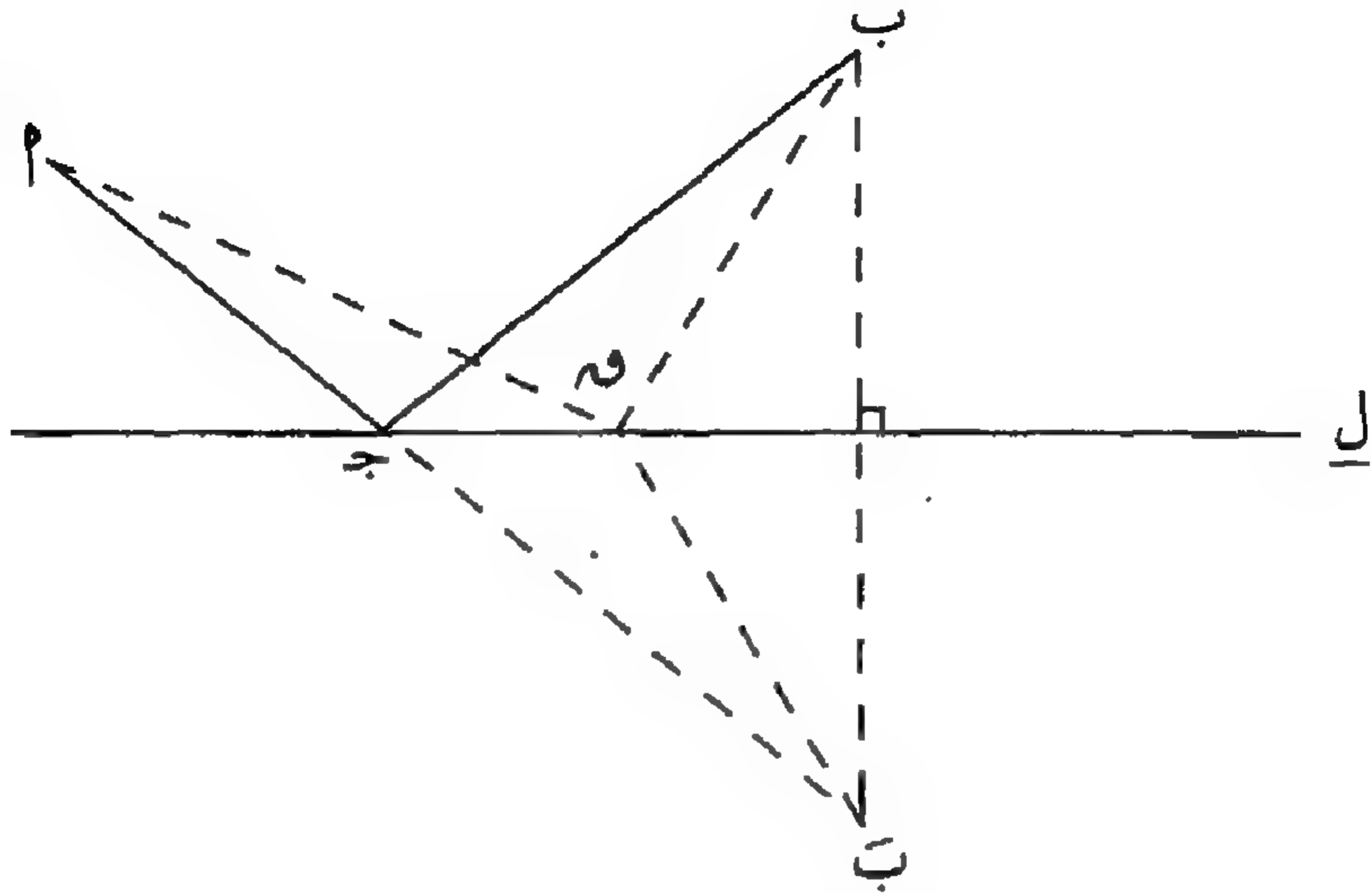
$$\overline{أب} < \overline{أق} + \overline{قب} = \overline{أق} + \overline{قب}$$

لكن :  $\overline{أج} + \overline{جـب} = \overline{أج} + \overline{جـب} = \overline{أب}$

ومن ثم فان

$$\overline{أق} + \overline{قـب} < \overline{أج} + \overline{جـب}$$

أى أن النقطة جـ =  $\overline{أب} \cap \underline{ل}$  هى التى تجعل  $\overline{أج} + \overline{جـب}$  أصغر ما يمكن .



شكل (٢-١٠)

مثال (١١):

إذا كانت ع هى مجموعة رواسم الانعكاس فى مستوى ، فأثبت أن النظام

( ع ، ٥ ) يؤلف زمرة غير إبدالية .

الحل :

١- خاصية الانغلاق

نفرض أن  $\underline{س١}$  ،  $\underline{س٢}$  .

$$(\underline{س١} \circ \underline{س٢}) (\underline{ق}) = \underline{س١} (\underline{س٢} (\underline{ق})) = \underline{س١} (\underline{ق}') = \underline{ق}'' \quad \underline{ق} \in \underline{ق}''$$

أى أنه يوجد انعكاس وحيد يرسل  $ق$  الى  $ق''$  وبديهي أن محور هذا الانعكاس الجديد هو العمود على  $ق ق''$  من منتصفه .

## ٢- خاصية الدمج

نفرض أن  $س_1$  ،  $س_2$  ،  $س_3$  . ولأى نقطه  $ق$  دح<sup>٢</sup> ، نفرض أن

$$س_1(ق) = ق' ، س_2(ق') = ق'' ، س_3(ق'') = ق'''$$

وبالتالى ، فإن

$$(س_3 \circ س_2 \circ س_1)(ق) = ق''' = س_3(ق'') = س_3(س_2(ق')) = س_3(س_2(س_1(ق)))$$

$$= س_3(س_2(س_1(ق)))$$

$$= س_3(س_2(ق')) = س_3(ق'') = ق'''$$

أيضاً ،

$$(س_1 \circ س_2 \circ س_3)(ق) = ق''' = س_1(ق'') = س_1(س_2(ق')) = س_1(س_2(س_3(ق)))$$

$$= س_1(س_2(ق')) = س_1(ق'') = ق'''$$

$$= س_1(س_2(ق')) = س_1(ق'') = ق'''$$

أى أن :

$$(س_1 \circ س_2 \circ س_3)(ق) = ق''' = س_1(ق'') = س_1(س_2(ق')) = س_1(س_2(س_3(ق)))$$

## ٣- خاصية العنصر المحايد

نفرض أن :  $س_1(ق) = ق'$

$$(S \circ S)(Q) = S(S(Q)) = (S(Q))' = Q = I(Q)$$

حيث  $I$  هو راسم الوحدة ، أى أن  $S \circ S = I$  ، وبلغة أخرى ،

فإن

راسم الانعكاس  $I = S^{-1}$  هو التحويلة المحايدة للنظام (ع ، 0) لأن :

$$S \circ I = I \circ S = S \quad \text{لكل } S \text{ مع}$$

٤- خاصية المعكوس

$$\text{حيث أن } S \circ S^{-1} = I = S^{-1} \circ S \text{ ، فإن } S^{-1} = S^{-1}$$

أى أنه لكل  $S$  مع يوجد معكوس  $S^{-1}$  مع بحيث أن

$$S \circ S^{-1} = I = S^{-1} \circ S \quad \forall S \text{ مع}$$

من الخواص السابقة ، نستنتج أن النظام يؤلف زمرة .

٥- خاصية الابدال

لاحظ أن :  $S \circ S \neq S \circ S$  إلا إذا كان  $L \perp M$

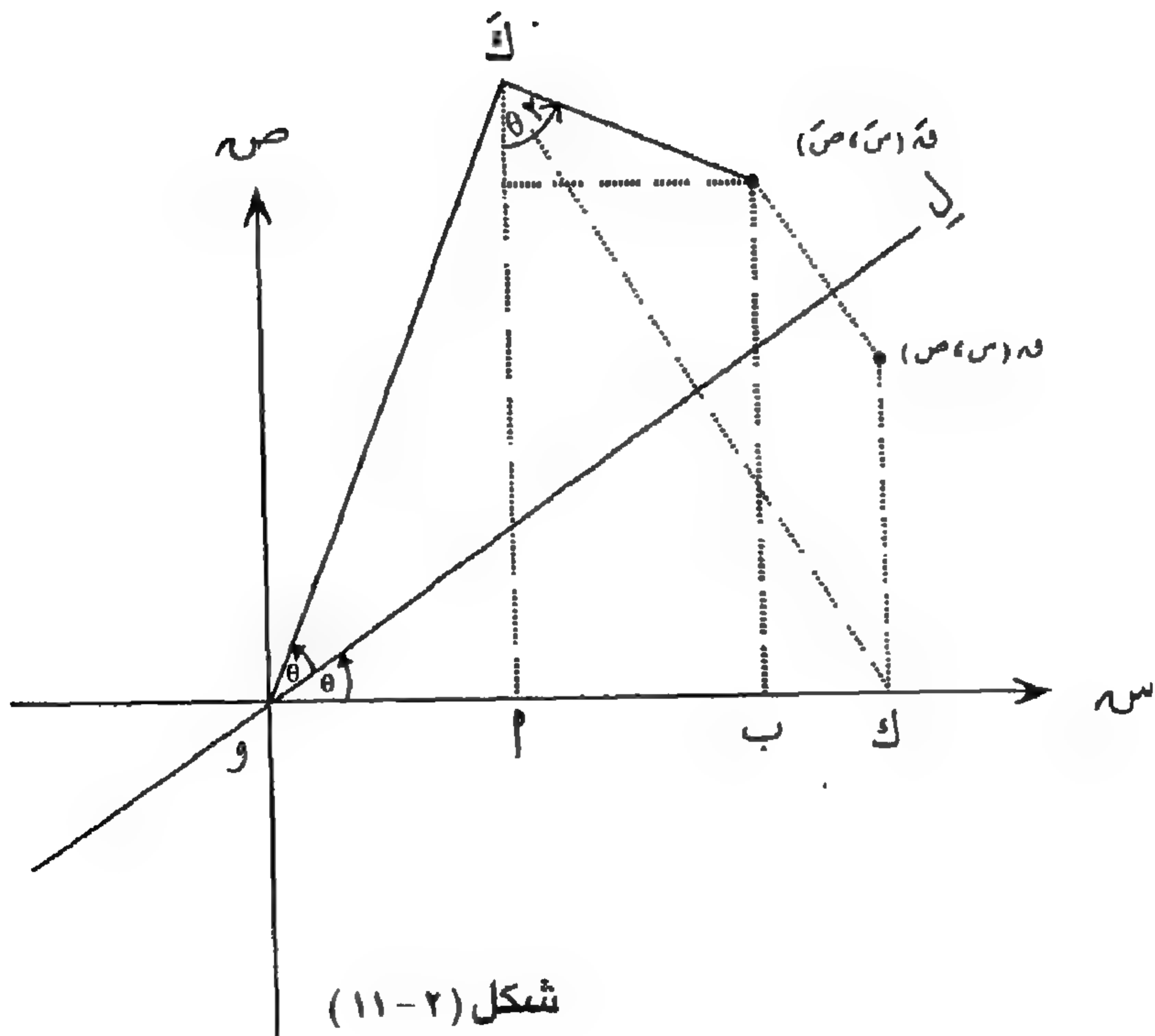
لذلك ، فالنظام (ع ، 0) يؤلف زمرة غير إبدالية .



## ٢-٣: مصفوفة الانعكاس

نفرض أن  $L$  خط مستقيم مار بنقطة الأصل  $O$  ، ويصنع زاوية  $\theta$  مع الاتجاه الموجب لمحور السنيات .

لتكن  $Q'$  (  $s'$  ،  $v'$  ) هي صورة  $Q$  (  $s$  ،  $v$  ) بالانعكاس بالنسبة للخط  $L$  . ولتكن النقطة  $K'$  هي صورة النقطة  $K$  التي هي موقع العمود من النقطة  $Q$  على محور السنيات (انظر شكل (١١-٢)).



من الشكل يتضح أن :

$$\overline{\text{ك و ك}} = \overline{\text{ك}} = \overline{\text{ق ك}} \quad \overline{\text{ق ك}} = \overline{\text{ج}} = 0 \quad 2$$

ويكون:

$$\overline{\text{س}} = \overline{\text{وب}} = \overline{\text{وأ}} + \overline{\text{أب}}$$

$$= \overline{\text{و ك}} \text{ حتا } 0 \quad 2 + \overline{\text{ق ك}} \text{ حتا } 0 \quad 2$$

$$(i) \quad \overline{\text{و ك}} \text{ حتا } 0 \quad 2 + \overline{\text{ق ك}} \text{ حتا } 0 \quad 2 =$$

$$= \overline{\text{س حتا } 0 \quad 2} + \overline{\text{ص حتا } 0 \quad 2}$$

وبالمثل ،

$$\overline{\text{ص}} = \overline{\text{ق ك}} = \overline{\text{أ ب}} = \overline{\text{ك أ}} - \overline{\text{ك ج}}$$

$$= \overline{\text{و ك}} \text{ حتا } 0 \quad 2 - \overline{\text{ق ك}} \text{ حتا } 0 \quad 2$$

$$= \overline{\text{و ك}} \text{ حتا } 0 \quad 2 - \overline{\text{ك ق}} \text{ حتا } 0 \quad 2$$

$$(ii) \quad \overline{\text{س حتا } 0 \quad 2} - \overline{\text{ص حتا } 0 \quad 2}$$

المعادلتان (i) ، (ii) يمكن كتابتهما في الصورة المصفوفية التالية :

$$\begin{pmatrix} \overline{\text{س}} \\ \overline{\text{ص}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \text{حتا } 0 \quad 2 & \text{حتا } 0 \quad 2 \\ \text{حتا } 0 \quad 2 - & \text{حتا } 0 \quad 2 \end{bmatrix}$$

المصفوفة

$$\begin{bmatrix} \text{حتا } 0 \quad 2 & \text{حتا } 0 \quad 2 \\ \text{حتا } 0 \quad 2 - & \text{حتا } 0 \quad 2 \end{bmatrix}$$

تسمى مصفوفة الانعكاس . هذه المصفوفة هي مصفوفة تحويل مناظره لعملية الانعكاس في خط  $L$  يمر بالنقطة  $(0,0)$  ويصنع زوايه  $\theta$  مع الاتجاه الموجب لمحور السينيات . ويلاحظ هنا أن محدد هذه المصفوفة يساوى  $(-1)$  .

ملاحظه (٣) :

١- مصفوفة الانعكاس بالنسبة الى محور السينيات :

$$\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

٢- مصفوفة الانعكاس بالنسبة الى محور الصادات:

$$\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

لا حظ هنا أن محدد كل من  $\underline{\underline{C}}_x$  ،  $\underline{\underline{C}}_y$  يساوى  $(-1)$  .

مثال (١٢) : أثبت أن المصفوفه  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  تمثل انعكاسا لجميع قيم  $A, B$  وذلك بفرض أن التحويل تساوى قياسى .

الحل :

نفرض مربع الوحدة الذى رؤوسه  $(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)$  من شكل (٧-١) مثال (٢٤) وجدنا أن صور هذه النقط على الترتيب هى  $(0,0), (أ, ج), (أ+ب, ج+د), (ب, د)$  وذلك تحت تأثير مصفوفة التحويل :

$$(i) \begin{pmatrix} أ & ب \\ ج & د \end{pmatrix}$$

وتبين لنا أن المربع تحول الى متوازي الأضلاع و  $ق ل ع$  . فإذا مثلت المصفوفة إنعكاساً، فإن أطوال الأضلاع المتناظرة لا تتغير وذلك من خاصية التساوى القياسى

اذن :

$$١ = \sqrt{ق}$$

أى أن :

$$١ = أ^٢ + ج^٢$$

وبالمثل :

$$١ = ب^٢ + د^٢ = \sqrt{ع}$$

أيضاً :

$$\sqrt{ق} = (أ - ب) + (ج - د)$$

$$= (أ - ب) + (ج - د)$$

أى أن :

$$أ^٢ + ج^٢ + ب^٢ + د^٢ - ٢أب - ٢ج د = ١ + ١$$

$$٢ = ٢ - ٢أب - ٢ج د = ٢$$

أى أن

$$أ ب + ج د = ٠$$

اذن

$$أ ب = - ج د$$

$$\text{أو} \quad \frac{1}{د} = - \frac{ج}{ب} \quad (\text{مثلاً}) \quad \lambda =$$

اذن

$$أ \lambda = د \quad , \quad ج = - \lambda ب$$

بما أن

$$١ = أ^٢ + ج^٢$$

اذن

$$١ = د^٢ \lambda^٢ + ب^٢ \lambda^٢$$

أى :

$$١ = \lambda^٢ (د^٢ + ب^٢) \quad \text{ومنها} \quad \lambda^٢ = ١$$

$$\text{أى أن : } \lambda = \pm ١$$

وحيث أن العملية عمليه انعكاس ، فيجب أن يكون المحدد مساوياً (١-).

أى أن :

$$أ د - ب ج = ١ -$$

وبالتالى تكون :

$$أ = د \lambda = د \quad , \quad ج = - \lambda ب = ب$$

$$\text{وتصبح المصفوفه (i) : } \begin{pmatrix} أ & ج \\ ١ - & ج \end{pmatrix} \quad (\text{ii})$$

وهى النتيجة المراد اثباتها .

وبوضع أ = حتا ٥٢ ، ج = حا ٥٢ فى (ii)

$$\text{نحصل على المصفوفة : } \begin{pmatrix} \text{حتا } ٥٢ & \text{حا } ٥٢ \\ \text{حا } ٥٢ & -\text{حتا } ٥٢ \end{pmatrix}$$

هى نفس النتيجة التى حصلنا عليها سابقاً . ويجب ملاحظه أن هذا التحويل

يعكس المستوى  $\pi$  فى الخط  $\underline{ل}$  : ص = (طا ٥) س الذى يصنع زاويه  $\theta$  مع الاتجاه الموجب لمحور السنيات .

مثال (١٣) : باستخدام مصفوفة الانعكاس ، أوجد قاعده الانعكاس للخط

$$\underline{ل} = \{ (س ، ص) : ص = \frac{١}{\sqrt{٣}} س \}$$

الحل :

$$\text{طا } \theta = \frac{١}{\sqrt{٣}} \Leftrightarrow \theta = ٣٠ \Leftrightarrow \theta ٢ = ٦٠$$

$$\text{بالتالى ، فان : حتا } ٥٢ = \text{حتا } ٦٠ = \frac{١}{٢} \\ \text{حا } ٥٢ = \text{حا } ٦٠ = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$$

اذن قاعده الانعكاس:

$$\begin{pmatrix} س' \\ ص' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{١}{\sqrt{٣}} & \frac{١}{٢} \\ \frac{١}{٢} & -\frac{\sqrt{٣}}{٢} \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 'س \\ 'ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}س + \frac{\sqrt{3}}{2}ص \\ \frac{1}{2}ص - \frac{\sqrt{3}}{2}س \end{pmatrix}$$

$$\text{أى : } 'س = \frac{1}{2} (س + \sqrt{3}ص) , 'ص = \frac{1}{2} (\sqrt{3}س - ص)$$

وهى نفس النتيجة التى حصلنا عليها فى مثال (٥) .

مثال (١٤) : إذا كان

$$\underline{ل} = \{ (س، ص) : ص = -س \}$$

فان :

$$\begin{pmatrix} 'س \\ 'ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

أى أن

$$\bar{س} = -ص , \bar{ص} = س$$

وبالتالى ، فان

$$\underline{س} = (س، ص) = (-ص، س)$$

وهى نفس النتيجة التى حصلنا عليها فى مثال (٣) .

مثال (١٥) : فى هذا المثال ، سنحاول حل مثال (٤) باستخدام مصفوفة الانعكاس.

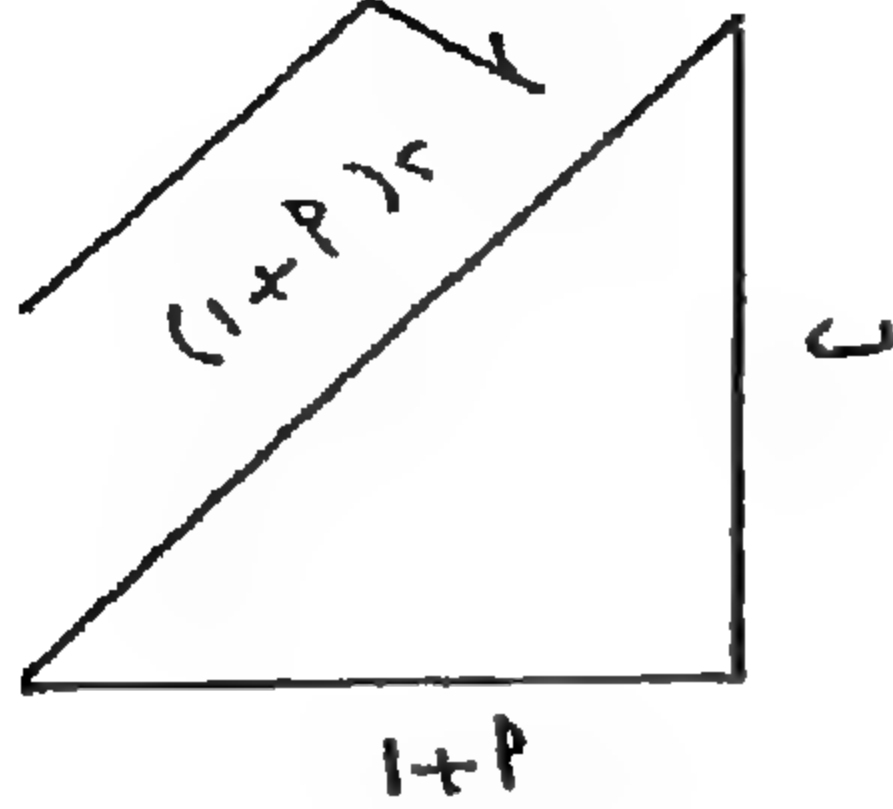
حيث أن

$$\underline{ل} = \{ (س، ص) : ص = \frac{ب}{1+1}س , 1 \neq 1- , 'ا + 'ب = 1 \}$$

فان :

$$\text{ط} \theta = \frac{\text{ب}}{1 + \text{ا}} = \text{ميل الخط لـ}$$

من الشكل (١٢-٢) ينتج أن :



$$\text{ح} \theta = \frac{\text{ب}}{(1 + \text{ا})^2}$$

شكل (١٢-٢)

$$\text{ح} \theta = \frac{1 + \text{ا}}{(1 + \text{ا})^2}$$

لكن :

$$\text{ب} = \frac{1 + \text{ا}}{(1 + \text{ا})^2} \times \frac{\text{ب}}{(1 + \text{ا})^2} = \text{ح} \theta = \text{ح} \theta = \text{ح} \theta$$

أيضاً :

$$\text{ح} \theta = \theta - 1 = \theta - 1$$

$$\frac{\text{ب} - (1 + \text{ا})}{1 + \text{ا}} = \frac{\text{ب}}{1 + \text{ا}} - 1 = \left( \frac{\text{ب}}{(1 + \text{ا})^2} \right) - 1$$

$$1 = \frac{(1 + \text{ا})}{1 + \text{ا}} = \frac{1 + \text{ا}}{1 + \text{ا}} = \frac{(1 - 1) - (1 + \text{ا})}{1 + \text{ا}}$$

اذن ، قاعده الانعكاس :

$$\begin{pmatrix} \text{س}' \\ \text{ص}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \text{حنا } 02 & \text{حنا } 02 \\ \text{حنا } 02 - & \text{حنا } 02 \end{bmatrix}$$

أو

$$\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{أس} + \text{ب ص} \\ \text{ب س} - \text{أ ص} \end{pmatrix}$$

وبالتالى :

$$\text{س}' = \text{أس} + \text{ب ص} , \text{ص}' = \text{ب س} - \text{أ ص}$$

أى أن :

$$\underline{\text{س}} = (\text{س}, \text{ص}) = (\text{أس} + \text{ب ص} , \text{ب س} - \text{أ ص})$$

وهى نفس النتيجة التى حصلنا عليها فى مثال (٤) .

ملاحظة (٣) : فى المثال السابق ، شاهدنا أنه اذا كان

$$\underline{\text{ل}} = \{ (\text{س}, \text{ص}) : \text{ص} = \frac{\text{ب}}{\text{أ}} \text{س} , \text{أ} \neq 1 , \text{أ}' + \text{ب}' = 1 \}$$

فان مصفوفة الانعكاس هى :

$$\begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{ب} & -\text{أ} \end{bmatrix}$$

هذه المصفوفة هى مصفوفة تحويل مناظره لعملية الانعكاس فى الخط ل .

مثال (١٦) : نفرض أن  $\underline{ل} = \{ (س، ص) : ص = ٣ س \}$  . إذا كانت  $ق(٣، ٤)$   
 فأوجد  $ق' / حيث ق' = س' /$  (ق) .

الحل :

نضع :

$$٣ = \frac{ب}{١ + /}$$

(i)

$$٣ + / ٣ = ب$$

(ii)

$$١ = ب' + /' ،$$

بحل (i) ، (ii) ينتج أن :

$$\frac{٣}{٥} = ب ، \frac{٤}{٥} - = /$$

من ملاحظة (٣) ، تكون مصفوفة الانعكاس هي :

$$\begin{pmatrix} \frac{٣}{٥} & \frac{٤}{٥} - \\ \frac{٤}{٥} & \frac{٣}{٥} \end{pmatrix}$$

وبالتالي فإن :

$$\begin{pmatrix} /س \\ /ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ \\ ٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{٣}{٥} & \frac{٤}{٥} - \\ \frac{٤}{٥} & \frac{٣}{٥} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} /س \\ /ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{٩}{٥} + \frac{١٦}{٥} - \\ \frac{١٢}{٥} + \frac{١٢}{٥} \end{pmatrix}$$

اذن :

$$\frac{٢٤}{٥} = /ص ، \frac{٧}{٥} - = /س$$

أى أن :

$$\left( \frac{24}{5}, \frac{7}{5} - \right) = (3, 4) \text{ س}$$

لاحظ هنا أن مصفوفة الانعكاس هي مصفوفة تحويل مناظره لعملية الانعكاس في ل.

مثال (١٧) : أوجد قاعده الانعكاس للخط

$$\underline{ل} = \{ (س، ص) : ص = \sqrt{3} س \}.$$

الحل :

$$\overline{3} = \theta \text{ طا}$$

اذن :

$$\overline{3} = \frac{ب}{1 + /}$$

(i)

$$\overline{3} + \overline{3} = ب$$

(ii)

$$1 = ب + 1$$

بحل (i) ، (ii) ينتج أن :

$$\frac{\overline{3}}{2} = ب ، \frac{1}{2} = /$$

وبالتالى فان مصفوفة الانعكاس هي :

$$\begin{pmatrix} \frac{\overline{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\overline{3}}{2} \end{pmatrix}$$

وبالتالى فان :

$$\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\overline{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\overline{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} /س \\ /ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ص \frac{\bar{3}2}{2} + س \frac{1}{2} - \\ ص \frac{1}{2} + س \frac{\bar{3}2}{2} \end{pmatrix}$$

ومن تساوی مصفوفتین ینتج أن :

$$س \frac{1}{2} = /ص \frac{1}{2} - ( \bar{3}2 + س ) \frac{1}{2} ، ص \frac{1}{2} = /ص \frac{1}{2} - ( \bar{3}2 + س ) \frac{1}{2}$$

اذن

$$\underline{س} \frac{1}{2} = (س، ص) \frac{1}{2} - ( \bar{3}2 + س ) \frac{1}{2}$$

وهی قاعده الانعکاس للخط ل .





## تمارين عامه

۱- لیکن  $\underline{ل} = \{(س،ص) : س = - ۳\}$

ا- اوجد  $\underline{ق}' = \underline{س}$  (ق) اذا كانت  $\underline{ق}$  (۵،۲)

ب- اوجد جـ بحيث أن  $\underline{س}$  (جـ) = (۷،۱)

ج- اذا كانت ك (س،ص) أى نقطه ، فعین  $\underline{س}$  (ك) .

۲- لیکن  $\underline{م} = \{(س،ص) : ص = ۲\}$

ا- اوجد  $\underline{ق}' = \underline{م}$  (ق) اذا كانت  $\underline{ق}$  (۳،  $\sqrt{۲}$ )

ب- اوجد د اذا كان  $\underline{م}$  (د) = (۲،-۴)

ج- اذا كانت ك (س،ص) أى نقطه ، فعین  $\underline{م}$  (ك) .

۳- نفرض أن  $\underline{ل} = \{(س،ص) : ص + ۲س = ۳\}$  ، أ (۲، ن) . احسب ن اذا كان

$\underline{س} (أ) = ۱$

۴- نفرض أن  $\underline{م} = \{(س،ص) : ن س - ۳ص = ۱\}$  ، ب (۳،-۱) .

احسب ن اذا كان  $\underline{م}$  (ب) = ب .

۵- لتكن أ (۱،-۱) ، ب (۴،۱) ، جـ (-۴، ۱) ، د (-۲، ن) . إذا كان ت تساوى

قياسى يرسل أ فوق جـ ، ب فوق د ، فاحسب ن .

٦- إذا كان  $\underline{ل} = \{(س،ص) : س + ٢ص = ١\}$  ،

$\underline{م} = \{(س،ص) : س = ١ - \}$

فأوجد معادله (أ)  $\underline{ل} = \underline{س م}$  (ب) ، (ج)  $\underline{م} = \underline{س م}$  (د)

٧- إذا كان  $\underline{ل} = \{(س،ص) : ص = ٢س - ١\}$

$\underline{م} = \{(س،ص) : ص = س\}$

$\underline{ن} = \{(س،ص) : ص = ٤ - \}$

فأوجد :

(ب)  $\underline{س م}$  (ن)

(أ)  $\underline{س م}$  (م)

(ع)  $\underline{س م}$  (ن)

(ج)  $\underline{س م}$  (ل)

٨- إذا كان  $\underline{ل} = \{(س،ص) : ص = -س\}$

$\underline{م} = \{(س،ص) : ٣ص = س + ٣\}$

فهل النقطة أ (-٢، -٤) تقع على الخط  $\underline{م} = \underline{س م}$  (م)

٩- إذا كان  $\underline{ل} = \{(س،ص) : ص = ٣\}$  ،  $\underline{م} = \{(س،ص) : ص = ١ - \}$  ن خط مار

بالنقطتين أ (١، ٤) ، ب (-١، -٢) فعين الآتى :

١- اكتب معادله الخط  $\underline{ن} = (\underline{س م} \circ \underline{س م})$  (ن)

٢- أوجد  $\underline{ق} // = (\underline{س م} \circ \underline{س م})$  (ق) ٧  $\underline{ق} (س،ص) \ni ح$  .

١٠- إذا كانت أ (٣،٤) ، ب (٥،٢) نقطتين في جهة واحدة من محور السنيات س ، فأوجد نقطة ج د س بحيث يكون أ ج + ج ب أصغر ما يمكن .

١١- لتكن ق (٦،٨) ، فأوجد ق' = س (ق) إذا كان :

$$\text{أ- ل} = \{(س،ص) : ص = ٥ س\}$$

$$\text{ب- ل} = \{(س،ص) : ص = \sqrt[٣]{س}\}$$

$$\text{ج- ل} = \{(س،ص) : ص = س + ١\}$$

$$\text{د- ل} = \{(س،ص) : ص = ٢ س - ٨\}$$

$$\text{هـ- ل} = \{(س،ص) : ص - ٢ س - ٥ = ٠\}$$

$$\text{و- ل} = \{(س،ص) : ص = \sqrt[٣]{س - ١}\}$$

١٢- ارسم المثلث  $\{(٠،٠) ، (٥،٠) ، (٥،١٠)\}$  ثم أوجد صورته تحت تأثير كل من التحويلات الآتية :

$$\text{أ- } \begin{pmatrix} \frac{٣}{٥} & \frac{٤}{٥} \\ \frac{٤}{٥} & \frac{٣}{٥} \end{pmatrix} \quad \text{ب- } \begin{pmatrix} \frac{٤}{٥} & \frac{٣}{٥} \\ \frac{٣}{٥} & \frac{٤}{٥} \end{pmatrix} \quad \text{ج- } \begin{pmatrix} \frac{٤}{٥} & \frac{٣}{٥} \\ \frac{٣}{٥} & \frac{٤}{٥} \end{pmatrix}$$

ماتأثير كل تحويلة ؟

١٣- ارسم الشكل الذي رؤوسه بالترتيب هي :

$$\{(٠،٠) ، (٠،١) ، (٢،١) ، (٤،٢) ، (٢،٠) ، (٢،٠)\}$$

ثم أوجد صورة هذا الشكل تحت تأثير كل من التحويلات الآتية :

$$\text{أ- } \begin{pmatrix} ٠ & ٤ \\ ٤ & ٠ \end{pmatrix} \quad \text{ب- } \begin{pmatrix} ٠ & \frac{٥}{٢} \\ \frac{٥}{٢} & ٠ \end{pmatrix} \quad \text{ج- } \begin{pmatrix} ٠ & ٥ \\ ٥ & ٠ \end{pmatrix}$$



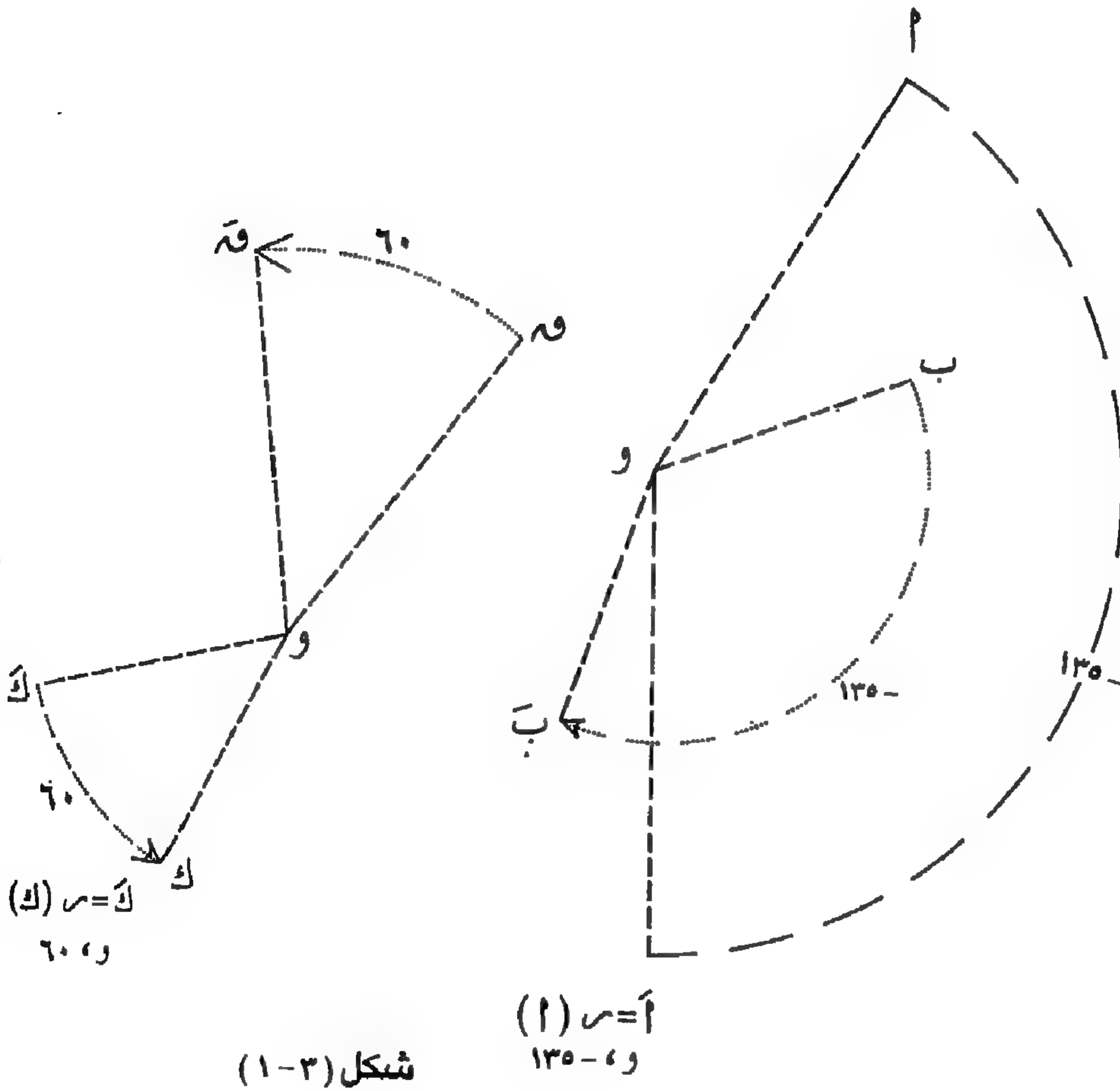
# الباب الثالث

## الدوران

١-٣: صورہ النقطة بالدوران

تعريف : لنفرض أن  $و$  نقطه معطاه،  $\theta$  عدد بين  $١٨٠$  ،  $١٨٠$  .

الدوران حول  $و$  بزاويه  $\theta$  هو راسم  $س$  معرف لجميع نقط المستوي كالتالى :  
 $\theta, ر$





$$١- \text{م} (و) = و$$

$$٢- \text{ق} \neq \text{ق} \text{ و يكون م} (ق) = \text{ق} \text{ بحيث أن، } \text{ق} \text{ و} \text{ق} = \theta, \text{ و} \text{ق} = \text{ق}.$$

من التعريف السابق نلاحظ أن : صورته أى نقطه  $\text{ق}$  تحت تأثير  $\text{م}$  تقع على دائره

مركزها ونصف قطرها  $\text{ق}$ .

علاوه على ذلك ، فان زاويه الدوران يجب أن تقع بين  $- ١٨٠$  ،  $+ ١٨٠$  فى اتجاه مع عقارب

الساعه عند  $\theta > ٠$  وفى اتجاه مضاد لعقارب الساعه عند  $\theta < ٠$ .

أيضاً ، من التعريف نستنتج أن : أى دوران هو تحويله هندسيه (مستويه) وكذلك تساوى

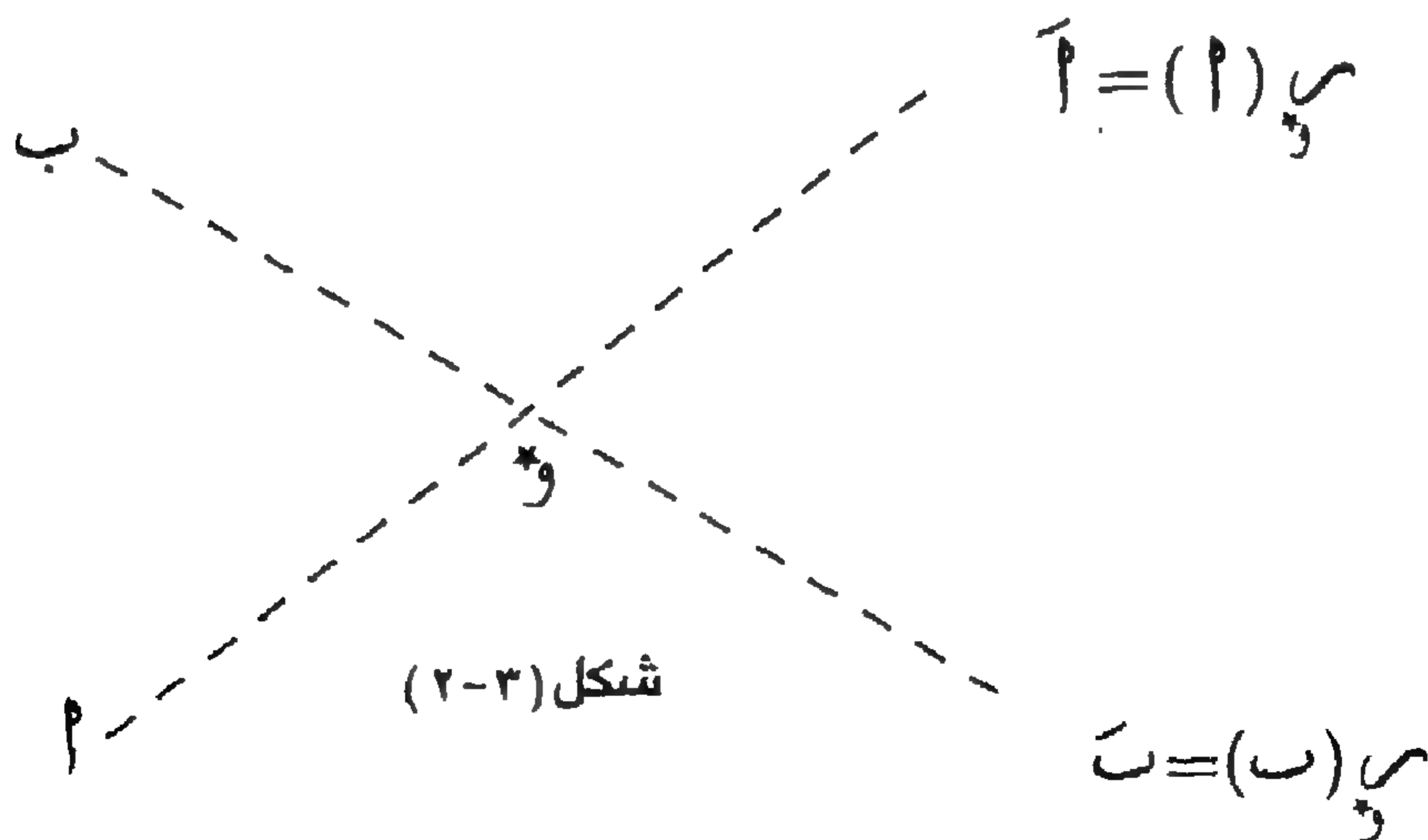
قياسى .

٣-٢: نصف الدوره

تعريف : نصف الدوره حول نقطه معطاه  $و^*$  عبارته عن راسم  $\text{م}$  معرف لكل نقطه  $\text{ق}$  فى المستوى

كالتالى :

١- اذا كانت  $\text{ق} \neq و^*$  فان  $\text{م} (ق) = \text{ق}$  بحيث  $و^*$  منتصف القطعه المستقيمه  $\text{ق} \text{ق}$ .



$$٢- \text{م} \cdot (\text{و}^*) = \text{و}^*$$

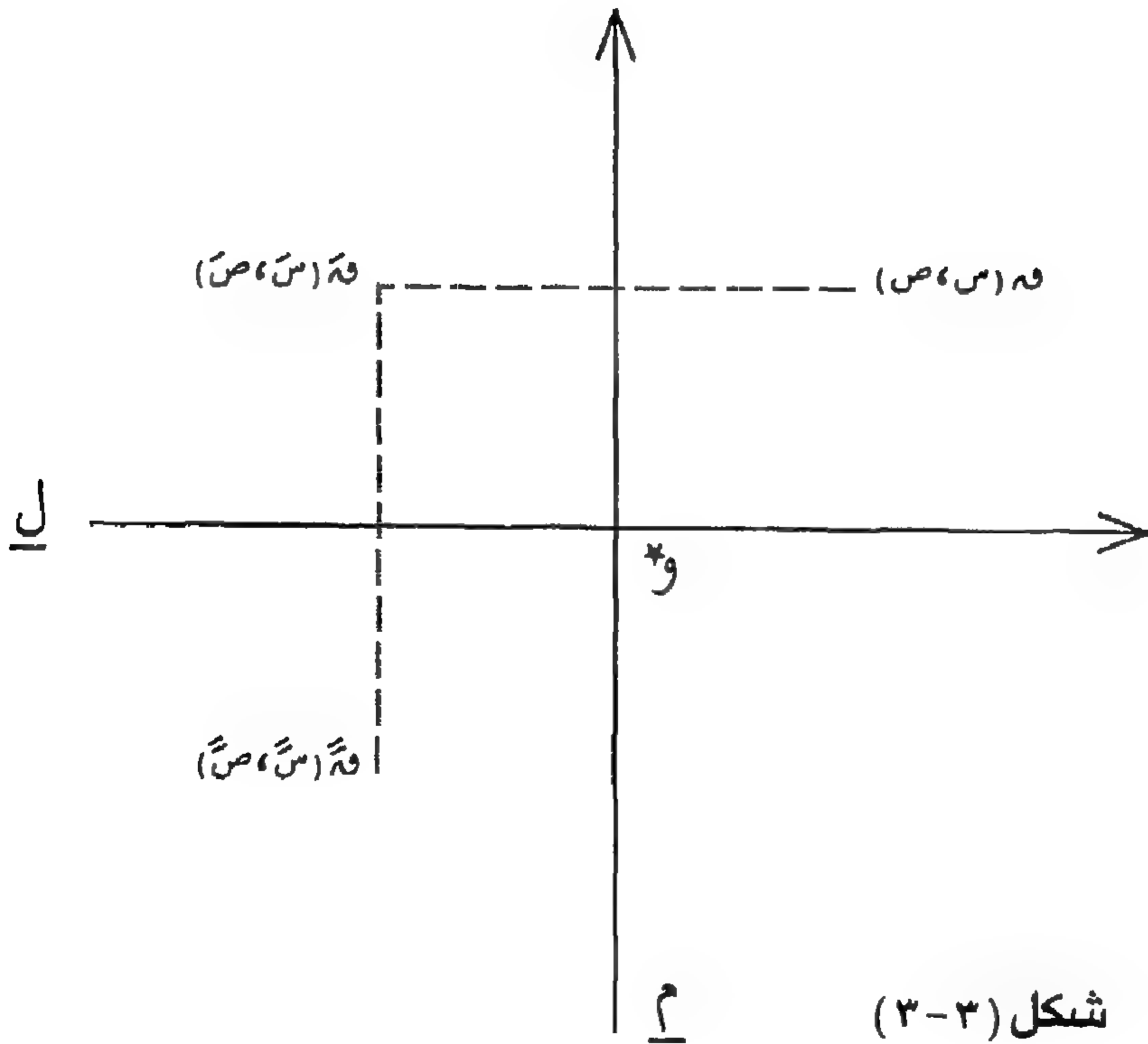
من هذا التعريف يتضح أيضاً أن نصف الدوره هي تحويله هندسيه (مستويه). من تعريف نصف الدوره يتضح لنا أن هذا الراسم هو حاله خاصه من التعريف العالم لراسم الدوران  $\text{م} \cdot (\text{و}^*)$  . عند

وضع  $\theta = 0$  ، فان  $\text{م} \cdot (\text{و}^*)$  هو راسم نصف دوره وعادة نكتبه  $\text{م} \cdot (\text{و}^*)$  فقط للسهولة .

نظريه (١) : اذا كان  $\text{ل} \perp \text{م}$  ،  $\text{و}^* = \text{ل} \cap \text{م}$  ؛ فان

$$\text{م} \cdot (\text{و}^*) = \text{ل} \cap \text{م}$$

البرهان :



شكل (٣-٣)

حيث أن  $\text{ل} \perp \text{م}$  ، فانه يمكننا أخذ  $\text{ل}$  كمحور للسنيات ،  $\text{م}$  كمحوراً للصادرات ، و  $\text{و}^*$  كنقطه

للأصل .

المطلوب اثبات أن :

$$s_{*}(q) = s_{\perp} \circ s_{\perp}(q) , \quad q \in \mathcal{H}^2$$

أولاً، لتكن  $q \in \mathcal{H}^2$  بحيث أن  $q \neq *$

$$\text{لنأخذ } s_{*}(q) = q^{*}$$

أو

$$s_{*}(s, v) = (s^{*}, v^{*})$$

اذن  $*$  تنصف القطعه المستقيمه  $qq^{*}$  . وبالتالي فان

$$\frac{1}{2}(s + s^{*}) = 0 , \quad \frac{1}{2}(v + v^{*}) = 0$$

أى

$$s^{*} = -s , \quad v^{*} = -v$$

اذن

$$(i) \quad s_{*}(s, v) = (-s, -v)$$

لكن

$$(s_{\perp} \circ s_{\perp})(s, v) = s_{\perp}(s_{\perp}(s, v))$$

$$= s_{\perp}(-s, -v)$$

$$(ii) \quad = (-s, -v)$$

من (i) ، (ii) نستنتج أن :

$$\text{لكن } s_{*}(q) = (s_{\perp} \circ s_{\perp})(q) = q^{*} \neq q$$

وحيث أن .

$$(\text{س}_1 \circ \text{س}_2) (\text{و}^*) = (\text{و}^*) = \text{س}_1 (\text{س}_2 (\text{و}^*)) = ((\text{و}^*) \text{س}_2) = (\text{و}^*) \text{س}_1 = \text{س}_1 (\text{و}^*) = \text{و}^*$$

و بصفه عامه ، يكون

$$\text{س}_1 \circ \text{س}_2 = \text{س}_1 \text{و}^*$$

نتيجه (١) : اذا كان  $\text{ل} \perp \text{م}$  ، فان  $\text{س}_1 \circ \text{س}_2 = \text{س}_1 \text{و}^*$  .

نتيجه (٢) : اذا كان  $\text{س}_1$  نصف دوره ، فان  $\text{س}_1^{\perp} = \text{و}^*$  .

البرهان :

$$\text{س}_1^{\perp} = \text{س}_1 \circ \text{س}_2 \text{و}^* , \text{ل} \perp \text{م}$$

(من نظريه (١))

$$\text{س}_1^{\perp} = (\text{س}_1 \circ \text{س}_2) \text{و}^*$$

(من تعريف التساوى)

$$\text{س}_1^{\perp} = \text{س}_1 \circ \text{س}_2^{\perp}$$

(ملاحظة (٩) بالباب الأول)

$$\text{س}_1^{\perp} = \text{س}_1 \circ \text{س}_2$$

(خاصية المعكوس)

$$\text{س}_1^{\perp} = \text{و}^*$$

(من نتيجه (١))

نظريه (٢) : اذا كانت  $\text{و}^* = (\text{أ، ب})$  ،  $\text{ق} (\text{س} ، \text{ص})$  د ح<sup>٢</sup> ، فان

$$\text{س}_1^{\perp} (\text{س} ، \text{ص}) = (\text{٢ أ - س} ، \text{٢ ب - ص})$$

البرهان :

نفرض أن :  $\mathcal{S}_* (q) = \bar{q}$

أر  $\mathcal{S}_* (s, v) = (s, \bar{v})$

اذن و\* هي منتصف القطعة المستقيمة  $\bar{q}q$  . وبالتالي فان

$$أ = \frac{1}{2} (s + \bar{s}) , \quad ب = \frac{1}{2} (v + \bar{v})$$

أى

$$\bar{s} = أ - 2 , \quad \bar{v} = ب - 2$$

اذن

$$\mathcal{S}_* (s, v) = (أ - 2 , ب - 2) .$$

مثال (١) : اذا كانت و\* = (٣، ٢) ، فعين

$$١ - \mathcal{S}_* (٣، ٢) \quad ٢ - \mathcal{S}_* (-٢، ٧) \quad ٣ - \mathcal{S}_* (١، -٤)$$

الحل :

من نظرية (٢) ، نعلم أن

$$\mathcal{S}_* (s, v) = (أ - 2 , ب - 2)$$

حيث هنا أ = ٢ ، ب = ٣ .

$$١ - \mathcal{S}_* (٣، ٢) = (٣ - ٦، ٢ - ٤) = (-٣، -٢)$$

$$٢ - \mathcal{S}_* (-٢، ٧) = (-٢ + ٦، ٧ - ٤) = (٤، ٣)$$

$$٣ - \mathcal{S}_* (١، -٤) = (١ - ٢، -٤ + ٢) = (-١، -٢)$$

$$= (-4, 6 + 1)$$

$$= (0, 7)$$

مثال (۲) : اذا كانت  $*$  و  $(-1, 0)$  ، فأوجد معادله كل من  $\underline{ل}$  ،  $\underline{م}$  اذن علم أن

$$ب (4, 3) \in \underline{ل} ، \underline{س} = \underline{س_1} \cap \underline{س_2}$$

الحل :

$$\underline{س} = \underline{س_1} \cap \underline{س_2} \quad \underline{ل} \perp \underline{م} ، \underline{ل} \cap \underline{م} = *$$

نفرض أن  $\underline{م}$  هو ميل الخط  $\underline{ل}$  ،  $\underline{م}$  هو ميل الخط  $\underline{م}$  .

اذن

$$\begin{aligned} \underline{م} &= \frac{4-0}{3-1} = 2 \\ \underline{م} &= -1 \end{aligned}$$

(لأن  $*$  ،  $\underline{ب} \in \underline{ل}$ ) ،  
(لأن  $\underline{ل} \perp \underline{م}$ )

معادله الخط  $\underline{ل}$  هي :

$$ص - 4 = س - 3$$

$$\underline{ل} = \{(س، ص) : ص - 4 = س - 3\}$$

أيضا ، معادله الخط  $\underline{م}$  هي :

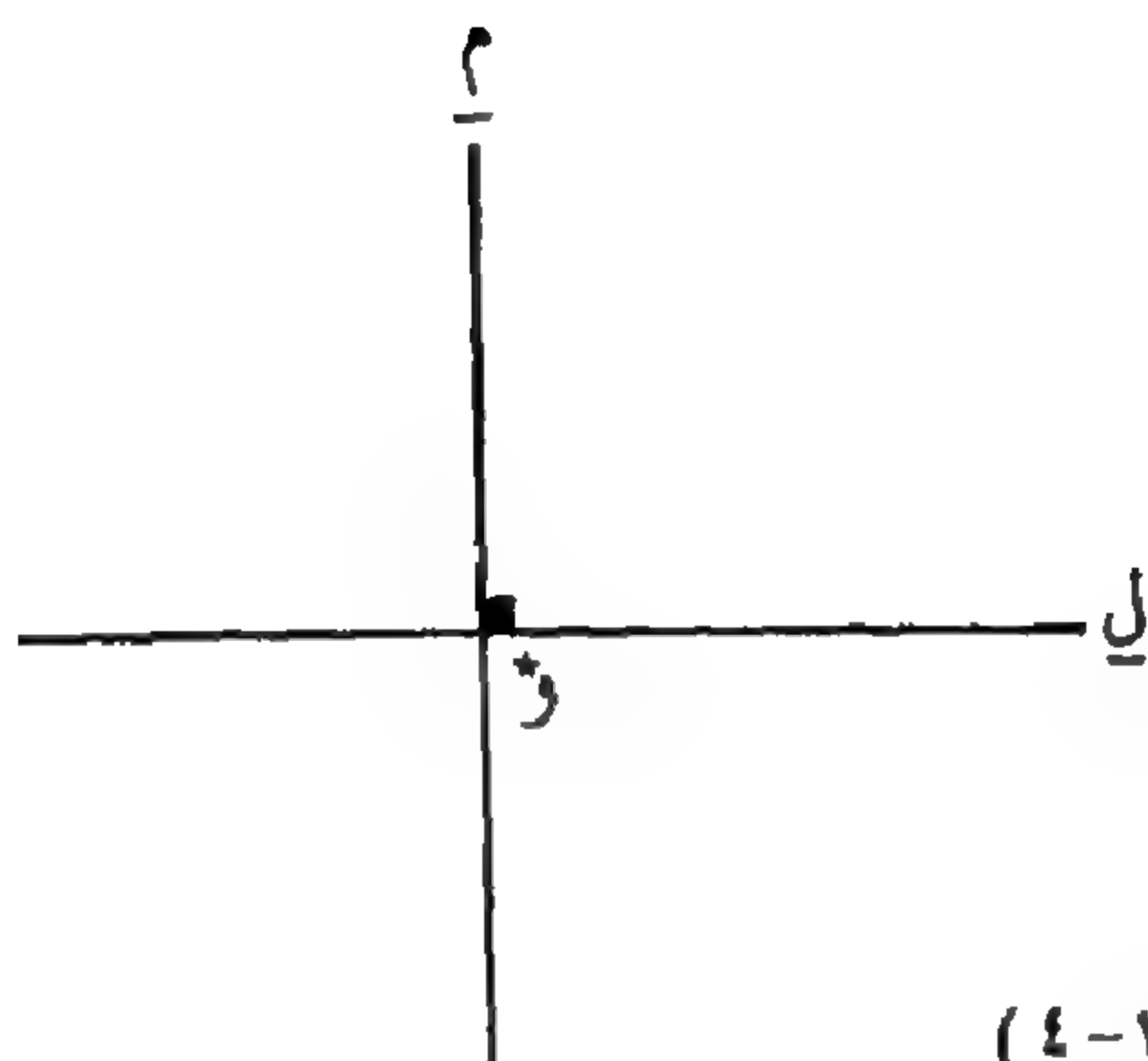
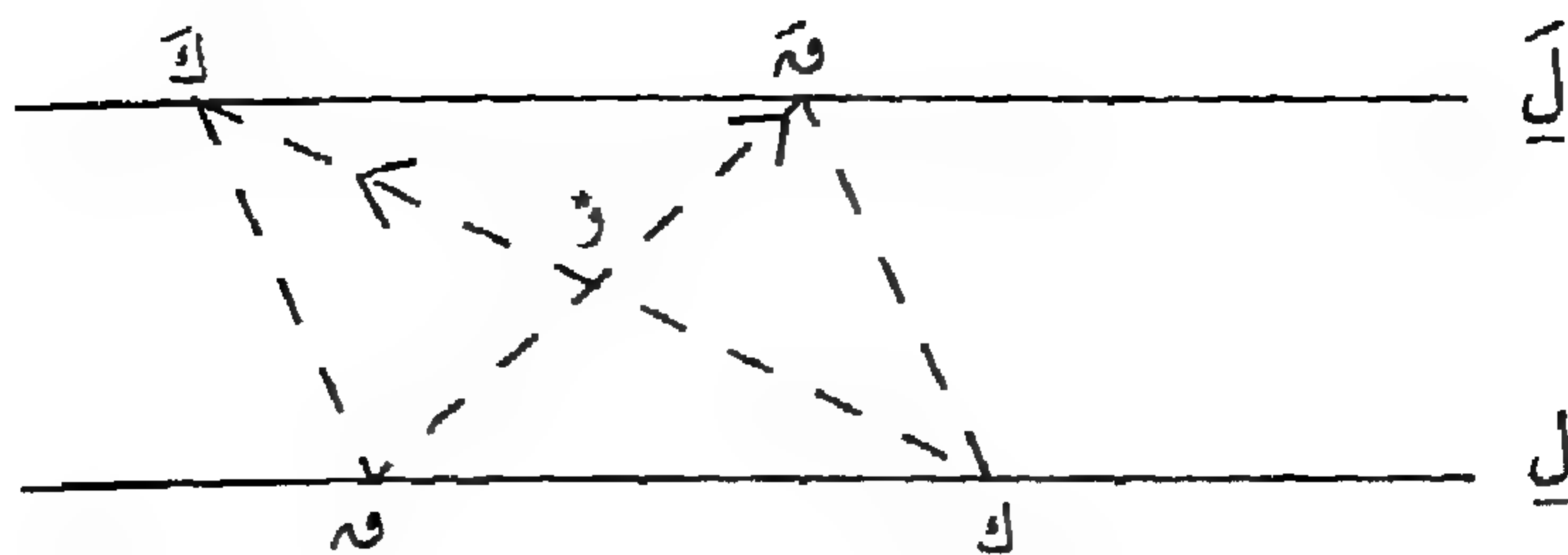
$$ص - 0 = 1 - (س + 1)$$

$$\underline{م} = \{(س، ص) : ص + 1 = س + 1\}$$

نظريه (۳) : ليكن  $\underline{س}$  أي نصف دوره ،  $\underline{ل}$  أي خط ،  $\underline{ل} = \underline{س}$  (ل) .

اذا كانت  $*$   $\underline{ل}$  فان  $\underline{ل} = \underline{ل}$  ، واذا كانت  $*$   $\underline{ل}$  فان  $\underline{ل} // \underline{ل}$  .

البرهان :



شکل (۳-۴)

أولاً، لنفرض أن و\* هـ ل ؛ ق، ك، د، ل ؛ ق - ق ؛ (ق) ؛ ك' = س ؛ (ك) ؛ ل = س ؛ (ل).

بما أن الخط ل يحتوي على ق، ك، فإن ل = ق، ك . لكن ق ك ق، ك متوازي أضلاع لأن

ق ق ن ك ك = و \*

ومن ثم يكون ق' ك' // ق ك ، اى اُن ل // ل

ثانياً ، لنفرض  $w^*$  دلي . اذا كان  $m \perp l$  ،  $m \cap l = w$  ، فان

$$\underline{u} \circ \underline{v} = *$$

وبالتالى :

$$(\underline{J})(\underline{J} \circ \mu) = (\underline{J})_* \underline{J} = \underline{J}$$



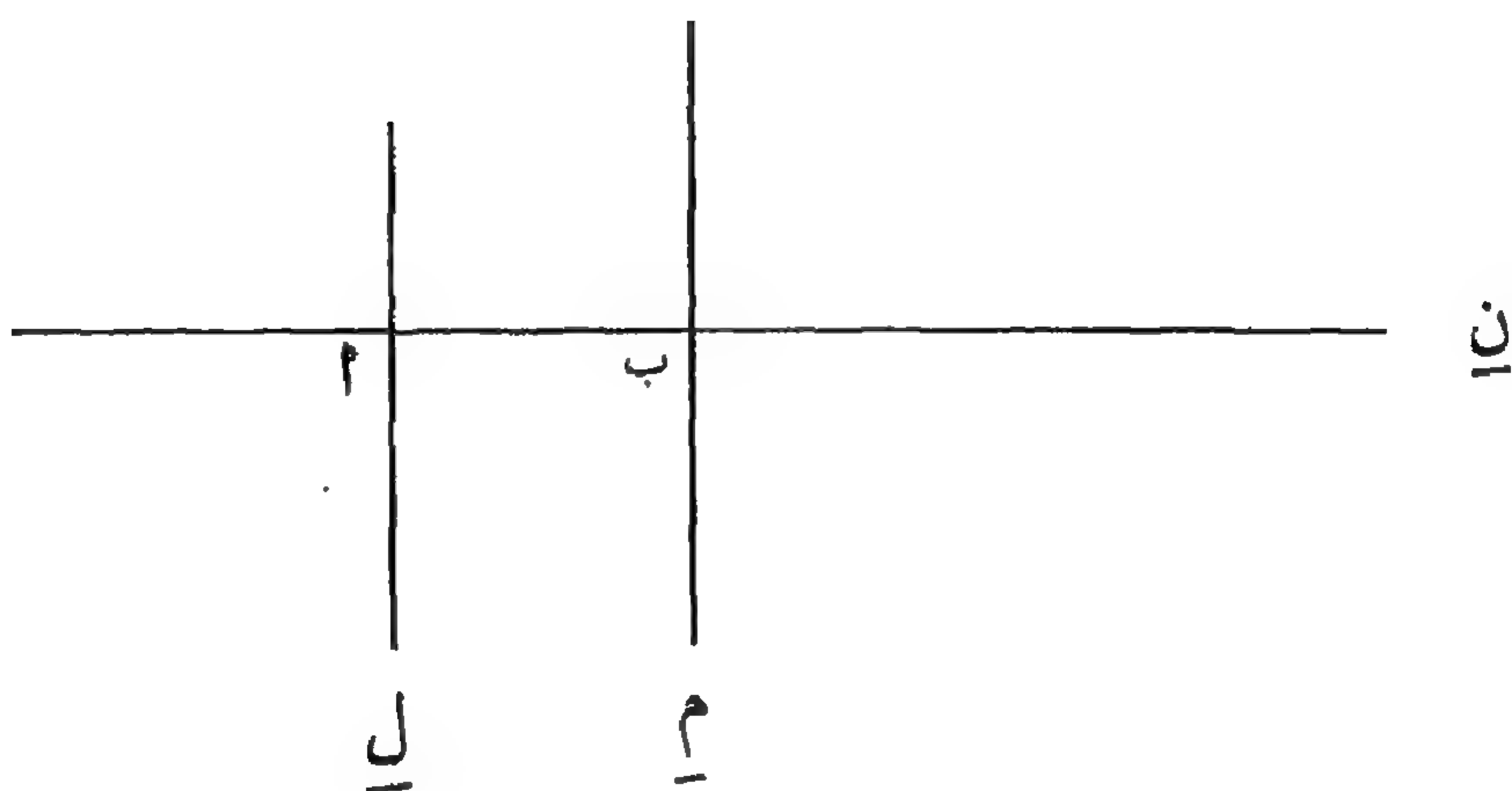
$$= \text{سم} (\text{سا} (\text{ل})) = \text{سم} (\text{ل})$$

بما أن  $\text{م} \perp \text{ل}$  ،  $\text{سم} (\text{ل}) = \text{ل}$  ؛ فان  $\text{ل} = \text{ل}$  .

نظريه (٤) : إذا كانت  $\text{أ} \neq \text{ب}$  ، جـ أى نقطه ، فان

$$(\text{سا} \circ \text{ساب}) (\text{ج}) \neq \text{ج}$$

البرهان :



شكل (٣-٥)

نفرض أن  $\text{ن} = \text{أب}$  ،  $\text{ل} \perp \text{ن}$  عند النقطه أ ،  $\text{م} \perp \text{ن}$  عند النقطه ب

باستخدام نظريه (١) :

$$\text{سا} \circ \text{سم} = \text{ساب} \quad ؛ \quad \text{سا} \circ \text{سم} = \text{ساب}$$

اذن :

$$\text{سا} \circ \text{ساب} = (\text{سا} \circ \text{سم}) \circ (\text{سا} \circ \text{سم})$$

$$= (\text{سا} \circ (\text{سا} \circ \text{سم})) \circ \text{سم}$$

$$= ((\text{سا} \circ \text{سم}) \circ \text{سم}) \circ \text{سم}$$

$$= (s_1 \circ 1) \circ s_1$$

$$= s_1 \circ s_1$$

لنفرض أن  $(s_1 \circ s_1) = (j) = j$

اذن :

$$(s_1 \circ s_1) = (j) = (s_1 \circ s_1) = (j) = j$$

وبالتالي :

$$(i) \quad s_1 = (s_1 \circ s_1) = (j) = s_1$$

لكن

$$s_1 \circ (s_1 \circ s_1) = (s_1 \circ s_1) \circ s_1$$

$$= 1 \circ s_1 = s_1$$

اذن

$$(ii) \quad (s_1 \circ (s_1 \circ s_1)) = (j) = s_1$$

من (i) ، (ii) ينتج أن :

$$s_1 = (j) = s_1$$

الآن ، لנأخذ  $j = s_1 = (j) = s_1$

إذا كانت  $j \neq *$  ، فإن  $j = m$  . لكن  $j$  ،  $m$  خطوط مختلفه لأنها عموديه على  $n$  عند نقط مختلفه أ ، ب على الترتيب . بهذا نكون قد وصلنا الى تعارض .

إذا كانت  $j = *$  ، فإن  $s_1 = (j) = j$  ،  $s_1 = (j) = j$  . وهذا يؤدي الى أن

$$j \subseteq j, j \supseteq m \Leftrightarrow j \subseteq m$$

بهذا نكون قد وصلنا الى تعارض مره أخرى .

مما سبق يتضح لنا أن  $(s_1 \circ s_1) = (j) = j$  فرض خاطيء . لهذا فان

$$(s_1 \circ s_1) = (j) \neq j$$

نتیجه (۳): اذا كانت أ ، ب نقط معطاه ، فانه توجد نصف دوره واحده فقط واحده ترسل أ فوق ب .

البرهان:

نفرض أن

$$\text{ساد (أ)} = \text{ب} , \text{س هـ (أ)} = \text{ب}$$

حيث كل من ساد ، س هـ راسمي نصف دوره .

اذن :

$$\text{ساد (أ)} = \text{س هـ (أ)} ,$$

$$\text{س هـ}^1 \circ \text{ساد} = \text{س هـ}^1 \circ \text{ساد}$$

أي :

$$\text{س هـ}^1 (\text{ساد (أ)}) = (\text{س هـ (أ)})$$

اذن :

$$\text{أ} = \text{ساد (س هـ (أ))} = (\text{ساد} \circ \text{س هـ}) (\text{أ})$$

من نظريه (٤) : اذا كانت د ، هـ نقط مختلفه ، فان ساد  $\circ$  س هـ ليس له نقطه ثابتة .

نتیجه ذلك هو أن د = هـ وبالتالي فانه توجد على الأكثر نصف دوره ترسل أ فوق ب.

علاوه على ذلك ، اذا كانت ق منتصف أب ، فانه يتضح أن س هـ (أ) = ب .

نظريه (٥) : اذا كانت س تحويله مستويه ، ع مجموعه ما من النقط ، أ نقطه معطاه ، فان

$$\text{أ د س (ع)} \Leftrightarrow \text{س}^{-1} (\text{أ}) \text{ د ع} .$$

البرهان :

اذا كانت أ د س (ع) ، فانه توجد نقطه ب وع بحيث أن س (ب) = أ. بما أن ر تحويله مستويه

، فان

$$(\text{س}^{-1} \circ \text{س}) (\text{ب}) = \text{س}^{-1} (\text{س (ب)}) = \text{س}^{-1} (\text{أ})$$



$$س_ع = (ق) = (س، ص) = (٦ - س، ٢ - ص) \text{ وبالتالي}$$

$$(س_ع \circ س_ع)^{-1} (ق) = (س_ع \circ س_ع) (ق)$$

$$= (س_ع (س_ع (ق)))$$

$$= (س، ص)$$

$$= (٦ - س، ٢ + ص) \quad \text{٧} \quad (ق) (س، ص) \text{ ح}^1$$

$$\text{ومن ثم يكون } (س_ع \circ س_ع)^{-1} (أ) = (٦ - ٤، ٢ - ٣) = (٢، -١) \text{ ولكن}$$

$$(٢) + (١ - ٤) \neq ١٦$$

$$\text{اذن } (س_ع \circ س_ع)^{-1} (أ) \notin \text{ع}$$

وباستخدام نظريه (٥) ينتج أن :

$$أ \notin (س_ع \circ س_ع) (ع)$$

٢ - اعتمادا على الجزء الأول من هذا المثال ، يمكننا القول بأن :

$$\text{٧} \quad (س، ص) ؛ ق \in (س_ع \circ س_ع) (ع) \Leftrightarrow (س_ع \circ س_ع)^{-1} (ق) \in \text{ع} \text{ لكن}$$

$$(س_ع \circ س_ع)^{-1} (ق) = (٦ - س، ٢ + ص)$$

اذن

$$(س_ع \circ س_ع)^{-1} (ق) \in \text{ع} \Leftrightarrow (٦ - س، ٢ + ص) \in \{(س، ص) : س + ٤ + ص = ١٦\}$$

وهذا يكون صحيحا اذا واذا فقط

$$١٦ = (٦ - س) + (٢ + ص)$$

اذن

$$ق (س، ص) \in (س_ع \circ س_ع) (ع) \Leftrightarrow ق (س، ص) \in \{(س، ص) : (٦ - س) + (٢ + ص) = ١٦\}$$

أى أن

$$س^2 + 4ص^2 - 12س + 16ص + 36 = 0$$

هـى صوره ع تحت تأثير التحويله (س<sub>١</sub> ٥ س<sub>٢</sub>)

\* حل آخر للحاله (٢) :

$$\text{المطلوب إيجاد ع} = (س_١ ٥ س_٢) (ع)$$

$$(4 \text{ حنا } \theta, 2 \text{ حا } \theta) \text{ وع}$$

اذن

$$(س_١ ٥ س_٢) (4 \text{ حنا } \theta, 2 \text{ حا } \theta) = (س_١ ٥ س_٢) (4 \text{ حنا } \theta, 2 \text{ حا } \theta)$$

$$= (س_١ ٥ س_٢) (4 - 6 \text{ حنا } \theta, 2 - 2 \text{ حا } \theta)$$

$$= (س_١ ٥ س_٢) (4 - 6 \text{ حنا } \theta, 2 - 2 \text{ حا } \theta) = (س_١ ٥ س_٢)$$

وبالتالى يكون :

$$س = 6 - 4 \text{ حنا } \theta, \quad ص = 2 - 2 \text{ حا } \theta$$

أى:

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} (6 - س), \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (2 - ص)$$

بالتربيع والجمع لحذف البارامتر  $\theta$  نحصل على :

$$1 = \frac{1}{16} (6 - س)^2 + \frac{1}{4} (2 - ص)^2$$

أى

$$س^2 + 4ص^2 - 12س + 16ص + 36 = 0$$

أى أن :

$$ع = \{(س, ص) : س^2 + 4ص^2 - 12س + 16ص + 36 = 0\}$$

٣-٣ : خواص الدوران

حتى نتعرف على خواص الدوران ، فاننا سنقدم بعض النظريات الهامه التاليه :

نظريه (٦) : ليكن  $\underline{ل} \cap \underline{م} = \underline{و}$  ،  $\underline{ل}$  غير عمودى على  $\underline{م}$  . اذا كانت  $\underline{ق}$  ،  $\underline{ك}$  نقط مختلفه عن  $\underline{و}$  ، فان :

$$\underline{ق} \underline{ق} \underline{و} \underline{ق} = \underline{ك} \underline{ك} \underline{و} \underline{ك}$$

حيث

$$\underline{ق} = (\underline{م} \circ \underline{م} \circ \underline{ق}) \quad ، \quad \underline{ك} = (\underline{م} \circ \underline{م} \circ \underline{ك})$$

البرهان :

لنختار  $\underline{ف}$  دل ومختلفه عن  $\underline{و}$  وسنبرهن أن

لاى نقطه  $\underline{ق} \neq \underline{و}$  تكون

$$\underline{ق} \underline{ق} \underline{و} \underline{ق} = \underline{ف} \underline{ف} \underline{و} \underline{ف}$$

$$\text{حيث } \underline{ف} = (\underline{م} \circ \underline{م} \circ \underline{ف})$$

اولا ، لنفرض أن :  $\underline{ق} \underline{د} \underline{ل}$  (شكل (٦-٣) (أ) ) . نلاحظ أن

$$\underline{و} = (\underline{م} \circ \underline{م} \circ \underline{و})$$

بما أن  $(\underline{م} \circ \underline{م} \circ \underline{ق})$  تساوى قياسى ، فان  $\underline{ق}$  ،  $\underline{ف}$  ، وتكون نقط واقعه على الخط واحد مار

بالنقطه  $\underline{و}$  . لهذا فان

$$\underline{ق} \underline{ق} \underline{و} \underline{ق} = \underline{ف} \underline{ف} \underline{و} \underline{ف}$$

والآن ، لنفرض أن  $\underline{ق} \underline{د} \underline{ل}$

بما أن التساوى القياسى يحفظ مقياس الزوايا ، فان

$$\underline{ق} \underline{ق} \underline{و} \underline{ق} = \underline{ق} \underline{ق} \underline{و} \underline{ق}$$

علاوه على ذلك يكون لكل من الثلاثى (  $\underline{و} \underline{ق} \underline{ف}$  ) والثلاثى (  $\underline{و} \underline{ق} \underline{ق}$  ) نفس التوجيه ، لأن

حاصل انعكاسين هو تساوى قياسى مباشر .

اذا كانت  $\underline{ق}$  كما بشكل (٦-٣) (ب) ، فنلاحظ أن

$$\underline{ق} \underline{ق} \underline{و} \underline{ق} = \underline{ق} \underline{ق} \underline{و} \underline{ق} + \underline{ق} \underline{ق} \underline{و} \underline{ق}$$



$$\text{لف وف} = \text{ف وق} + \text{ق وف}$$

ومنها ينتج أن :

$$\text{ق وق} = \text{ف وف}$$

بالتالي ، فانه لأي نقطه  $ق \neq و$  يكون

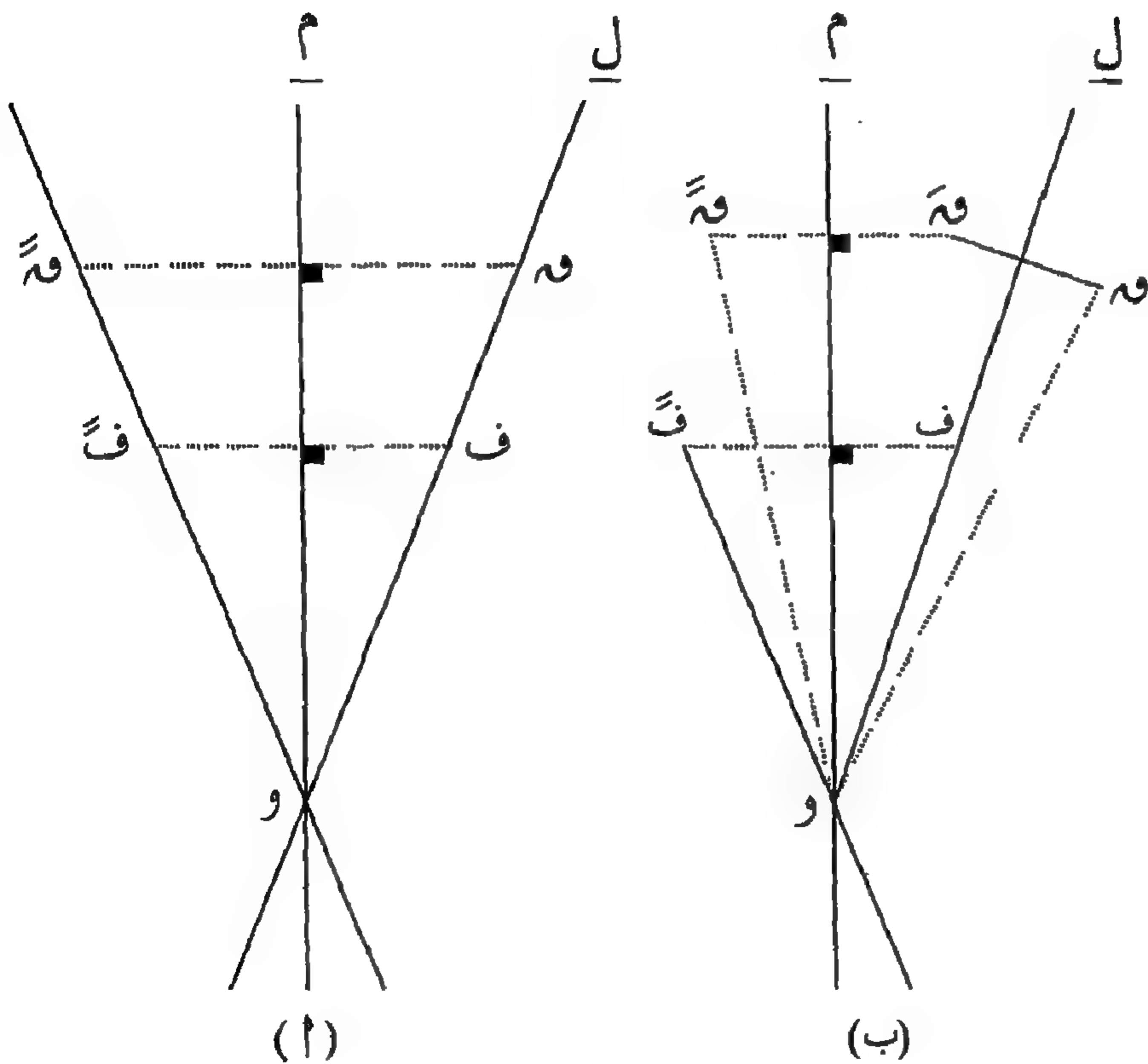
$$\text{ق وق} = \text{ف وف}$$

بالمثل ، فانه لأي نقطه  $ك \neq و$  يكون

$$\text{ك وك} = \text{ف وف}$$

اذن

$$\text{ك وك} = \text{ق وق}$$

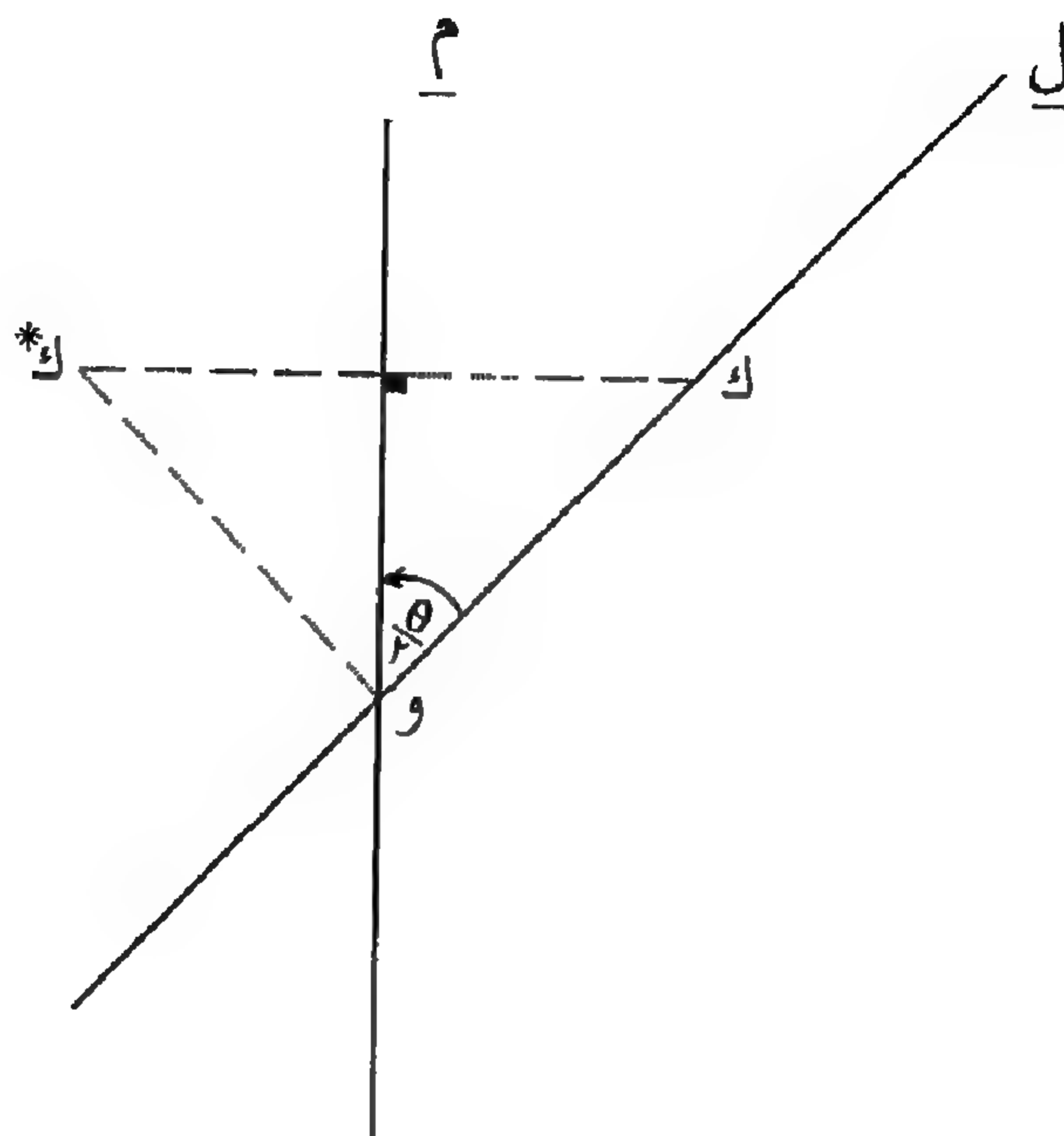


شكل (٣-٦)

\* نظريه (٧) : إذا كان  $\underline{ل} \cap \underline{م} = \underline{و}$  ،  $\underline{ل}$  غير عمودى على  $\underline{م}$  ، مقياس الروايه من  $\underline{ل}$  الى  $\underline{م}$  يساوى ، فان

$$\sin 0 = \sin 0$$

البرهان :



شكل (٧-٣)

لنفرض أن  $\underline{ق} \neq \underline{و}$  ، ولنختار  $\underline{ك} \neq \underline{و}$  .  
 إذا كانت  $\underline{ك}^* = (\sin 0 \sin \underline{ك})$  ؛ فان  $\underline{م}$  يكون منصفاً للزاويه  $\angle \underline{ك} \underline{و} \underline{ك}^*$  .  
 لكن مقياس الزاويه من  $\underline{ل}$  الى  $\underline{م}$  يساوى  $\frac{\theta}{2}$   
 اذن :

$$\angle \underline{ك} \underline{و} \underline{ك}^* = \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 = \theta$$

الآن ، إذا كانت  $\underline{ق}^* = (\sin 0 \sin \underline{ق})$  ، فمن النظرية السابقة

$$\triangle \text{ ق و ق } * = \triangle \text{ ك و ك } * .$$

$$\triangle \text{ ق و ق } * = \theta \quad \text{اذن}$$

بما أن  $\text{و}^* = (\text{م م}^0 \text{ م م}^1) (و)$  ، وبما أن  $(\text{م م}^0 \text{ م م}^1)$  تساوي قياسياً ، فان

$$\text{ق}^* \text{ و}^* = \text{ق} \text{ و} \quad \text{وبالتالي فان } \text{ق}^* \text{ و}^* = \text{ق} \text{ و} .$$

اذن

$$\text{م}^1_{\theta} = \text{م}^0_{\text{م}^1}$$

من هذه النظرية نستخلص أن : الدوران يكون مكافئاً لتحصيل انعكاسين بالنسبة لأي مستقيمين يمران بالنقطة و ( بشرط عدم تعامدهما ) ويحصران بينهما زاوية مقياسها يساوي نصف مقياس الدوران ( اتجاه الدوران من  $\underline{\text{ل}}$  الى  $\underline{\text{م}}$  )

نتيجته (٤) : الدوران هو تساوي قياسى مباشر .

في شكل (٣-٨) نلاحظ أن

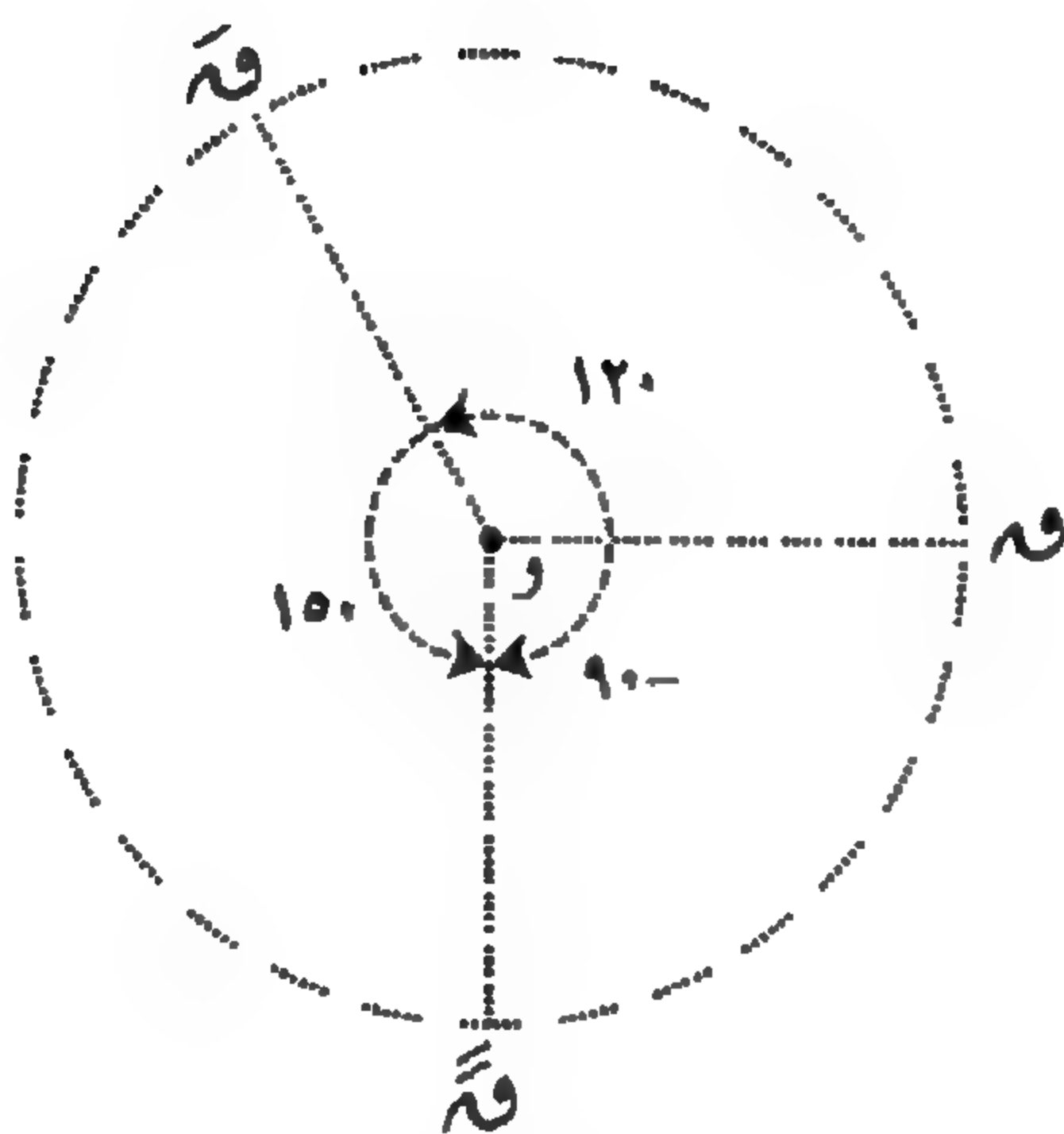
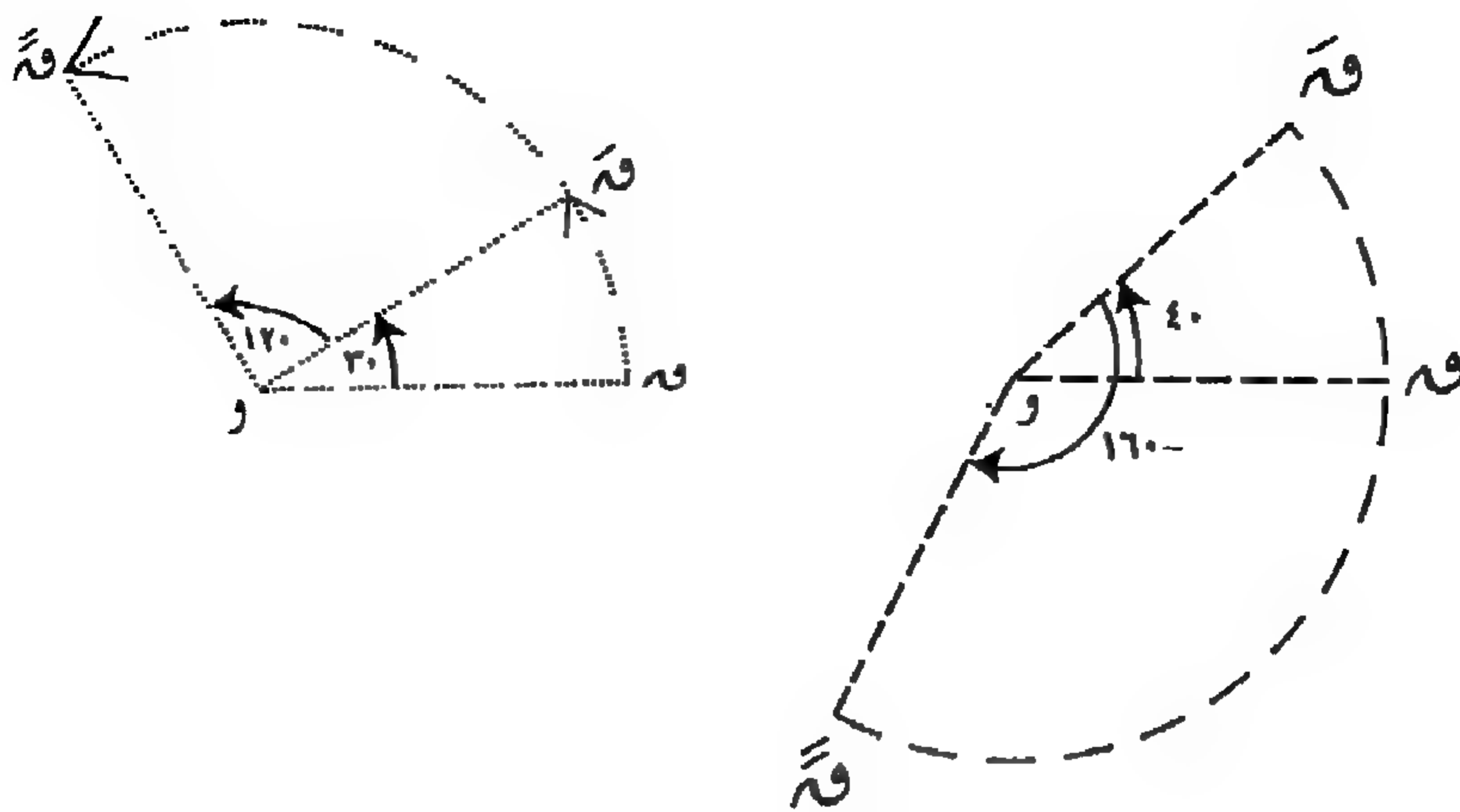
$$\begin{aligned} \text{م}^1_{120, \text{د}} &= \text{م}^0_{30, \text{د}} \text{ م}^1_{150, \text{د}} \\ \text{م}^1_{160, \text{د}} &= \text{م}^0_{40, \text{د}} \text{ م}^1_{120, \text{د}} \\ \text{م}^1_{150, \text{د}} &= \text{م}^0_{120, \text{د}} \text{ م}^1_{90, \text{د}} \end{aligned}$$

والآن : اذا كانت  $\text{ع} = \text{م}^1_{\theta}$  :  $\theta \in [180^-, 180^+]$  ، فان النظام (ع، ٥)

يؤلف زمرة ، لأنه على سبيل المثال :

(خاصية الانغلاق)

$$\text{م}^{-1}_{20, \text{د}} = \text{م}^0_{30, \text{د}} \text{ م}^1_{50, \text{د}}$$



شكل (٢-١)

$${}_{٦.٤}م = ({}_{١.٤}م \circ {}_{٣.٤}م) \circ {}_{٢.٤}م = {}_{١.٤}م \circ ({}_{٣.٤}م \circ {}_{٢.٤}م) - ٢$$

(خاصية الدمج)

٣- يوجد راسم الوحدة ١ =  $\frac{1}{100}$  م ، لأن

[illegible]

(خاصية العنصر المحايد)

٤- لكل من دع ، يوجد من بحيث أن

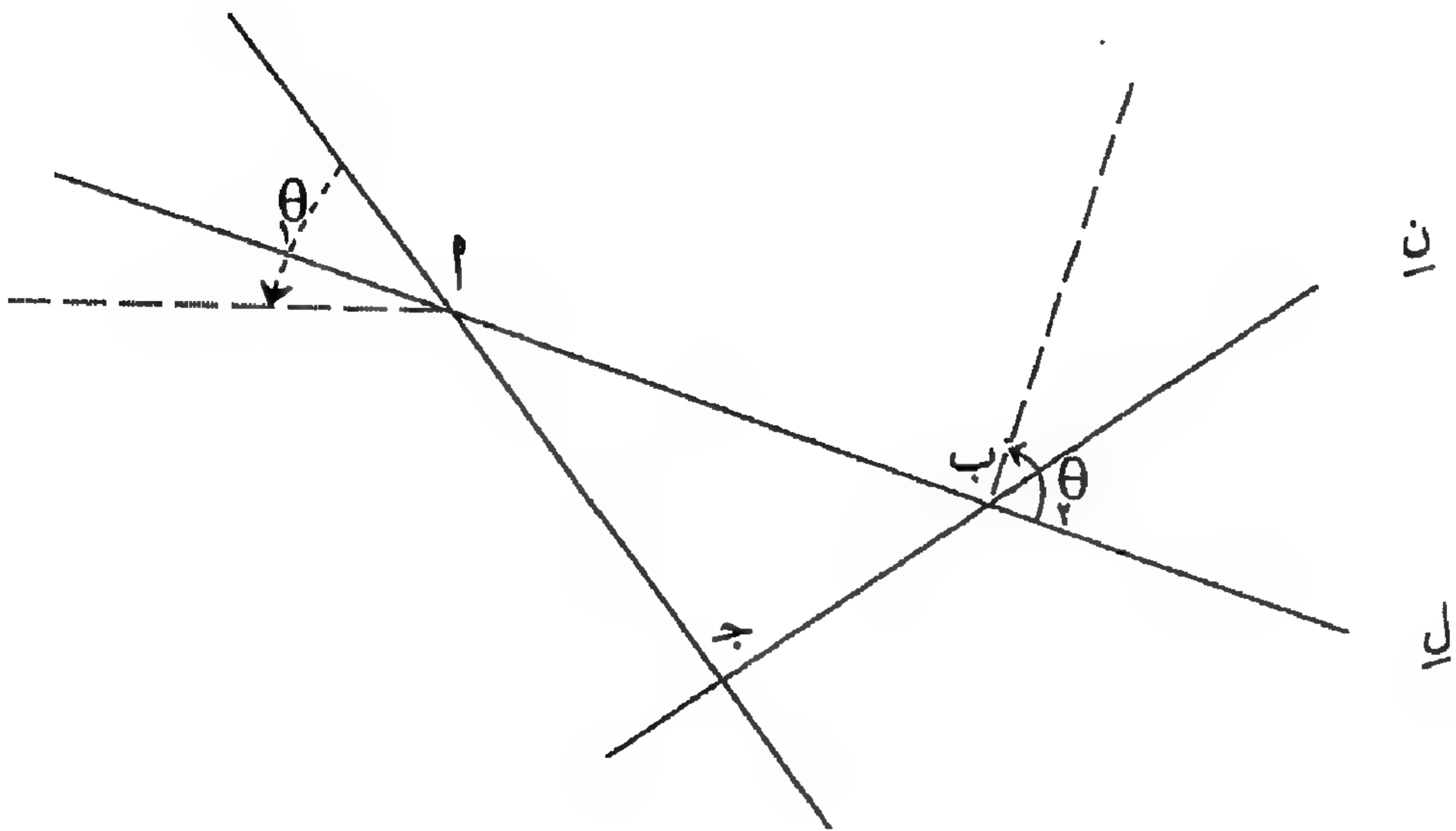
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \psi \, dx = 0$$

(خاصية المعكوس)

هو معكوس من  
٦.١.٩

وعلى سبيل المثال ، فان

فيما يلي سندرس تحصيل الدورانين  $\gamma$  ،  $\gamma'$  حيث  $\gamma \neq \gamma'$  .



شکل (۳-۹)



لنفرض أن  $\underline{ل} = \underline{أ} \underline{ب}$  . اذن توجد الخطوط  $\underline{ن}$  ،  $\underline{م}$  بحيث أن

$$\underline{م} = \underline{م} \circ \underline{م} = \underline{م} \circ \underline{ب} = \underline{م} \circ \underline{أ} = \underline{م}$$

بالتالى

$$(\underline{م} \circ \underline{م}) \circ (\underline{م} \circ \underline{ب}) = \underline{م} \circ \underline{م} = \underline{م}$$

$$(\underline{م} \circ \underline{م}) \circ (\underline{م} \circ \underline{ب}) = \underline{م} \circ \underline{م} = \underline{م}$$

$$(\underline{م} \circ \underline{م}) \circ (\underline{م} \circ \underline{ب}) = \underline{م} \circ \underline{م} = \underline{م}$$

$$(\underline{م} \circ \underline{م}) \circ (\underline{م} \circ \underline{ب}) = \underline{م} \circ \underline{م} = \underline{م}$$

فإذا كان  $\underline{ن} // \underline{م}$  فإن  $\underline{م} \circ \underline{ب} = \underline{م} \circ \underline{أ}$  . هو إنتقال (انظر الباب الرابع) . خلافاً لذلك فإن

$\underline{ن} \cap \underline{م} = \underline{ج}$  ، وبالتالى فإن  $\underline{م} \circ \underline{ب} = \underline{م} \circ \underline{أ}$  هو دوران حول  $\underline{ج}$  حسب نظرية (٧)

نظرية (٨) : تحصيل دورانين إما أن يكون دوران أو إنتقال .

\*ملاحظه (١) : ليكن  $\underline{م} \circ \underline{ب} = \underline{م} \circ \underline{أ}$  .

١ - إذا كان  $|\underline{م} \circ \underline{ب} + \underline{م} \circ \underline{أ}| \geq 180^\circ$  ، فإن  $\underline{م} \circ \underline{ب} + \underline{م} \circ \underline{أ} = \underline{م}$  .

٢ - إذا كان  $\underline{م} \circ \underline{ب} + \underline{م} \circ \underline{أ} < 180^\circ$  ، فإن  $\underline{م} \circ \underline{ب} + \underline{م} \circ \underline{أ} = \underline{م}$  .

٣ - إذا كان  $\underline{م} \circ \underline{ب} + \underline{م} \circ \underline{أ} > 180^\circ$  ، فإن  $\underline{م} \circ \underline{ب} + \underline{م} \circ \underline{أ} = \underline{م}$  .

٤ - إذا كان  $\underline{م} \circ \underline{ب} + \underline{م} \circ \underline{أ} = 0^\circ$  ، فإن التحصيل هو إنتقال .

مثال (٤) : أوجد زاوية الدوران للتحصيل  $120^\circ$  ،  $100^\circ$   $\circ$

الحل :

$$220^\circ = (100^\circ) + 120^\circ$$

بما أن  $220^\circ > 180^\circ$  ، نستخدم الحالة (٣) من الملاحظة السابقة

$$140^\circ = 360^\circ + 220^\circ = 0^\circ$$

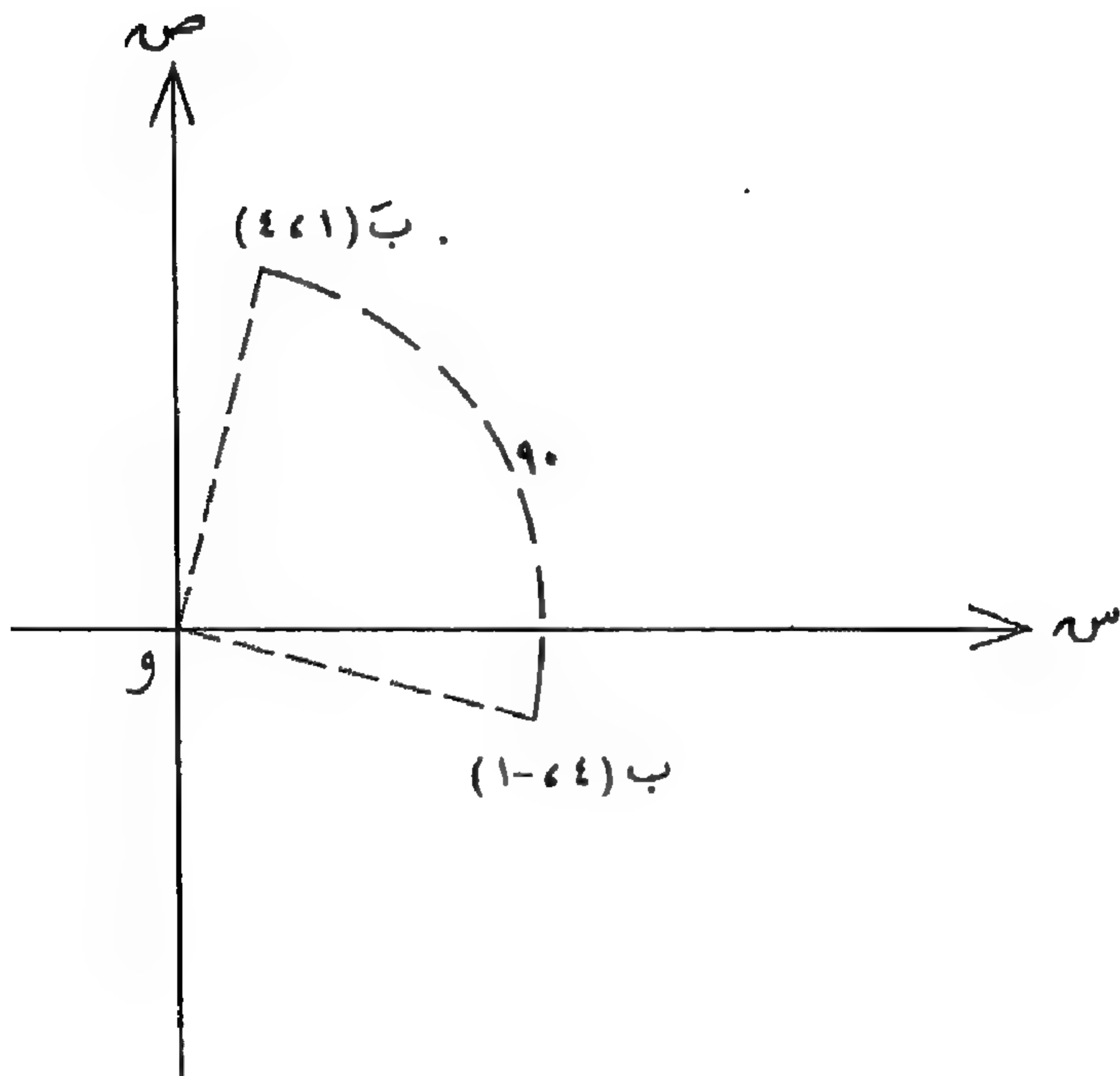
مثال (٥) : اذا كانت ونقطه الأصل ، فعين إحداثيات

١-  $90^\circ$  (ب) اذا كانت ب (٤ ، ١)  $(1, 4)$

٢-  $90^\circ$  (ق) اذا كانت ق (س ، ص) .

٣- النقطة د اذا كانت  $90^\circ$  (د)  $(1, 4) = (4, 1)$

الحل :



شكل (٣-١٠)



$$s^{-1} = (1, 4) = (4, 1) \quad 9.4.3$$

(من شكل (3-10)).

٢- الدوران  $s$  يمكن اعتباره مكافئاً لتحصيل انعكاسين بالنسبة الى  $9.4.3$

$$L = \{ (s, v) : v = 0 \} \text{ أولاً ثم الخط } M = \{ (s, v) : v = s \}$$

لكن

$$s_i (s, v) = (s, -v)$$

$$s_i (s, v) = (s, v)$$

اذن

$$s_i (s, v) = (s, v) \quad 9.4.3$$

$$= s_i (s, v)$$

$$= s_i (s, v) = (s, v)$$

٣- باستخدام الحالة السابقة يمكن الحصول على أن  $d = (-1, -4)$ .

ويجب علينا ملاحظه أن

$$s^{-1} = s \quad 0, 0$$

مثال (٦) : أثبت أن

$$1 - (\theta + \phi, \theta) = (\theta + \phi, -\theta)$$

$$2 - (\theta - \frac{\phi}{2}, \theta) = (\theta - \frac{\phi}{2}, \theta)$$

الحل :

١- بما أن

$$s : \theta \rightarrow \theta + \phi$$

اذن:

$$(i) \quad (حتا, \theta) \leftarrow (حتا, \theta + ط) \leftarrow (حتا, \theta + ط + ط) \leftarrow \dots$$

لكن:

$$(حتا, \theta) = (حتا, \theta + ط + ط + \dots)$$

أو

$$(ii) \quad (حتا, \theta) \leftarrow (حتا, \theta - ط) \leftarrow (حتا, \theta - ط - ط) \leftarrow \dots$$

من (i)، (ii) ينتج أن:

$$(حتا, \theta + ط) = (حتا, \theta - ط)$$

$$2 - نحن نعلم  $0 \leftarrow 0 \leftarrow 0 \leftarrow \dots$  أو  $0 \leftarrow 0 \leftarrow 0 \leftarrow \dots$$$

وبالتالي:

$$(i) \quad (حتا, \theta - \frac{ط}{2}) \leftarrow (حتا, \theta - \frac{ط}{2} - \frac{ط}{2}) \leftarrow \dots$$

لكن

$$(حتا, \theta - \frac{ط}{2}) = (حتا, \theta - \frac{ط}{2} - \frac{ط}{2} - \dots)$$

$$(حتا, \theta - \frac{ط}{2}) = (حتا, \theta - \frac{ط}{2} - \frac{ط}{2} - \dots)$$

أي

$$(ii) \quad (حتا, \theta) \leftarrow (حتا, \theta - ط) \leftarrow (حتا, \theta - ط - ط) \leftarrow \dots$$

من (i) ، (ii) ينتج أن :

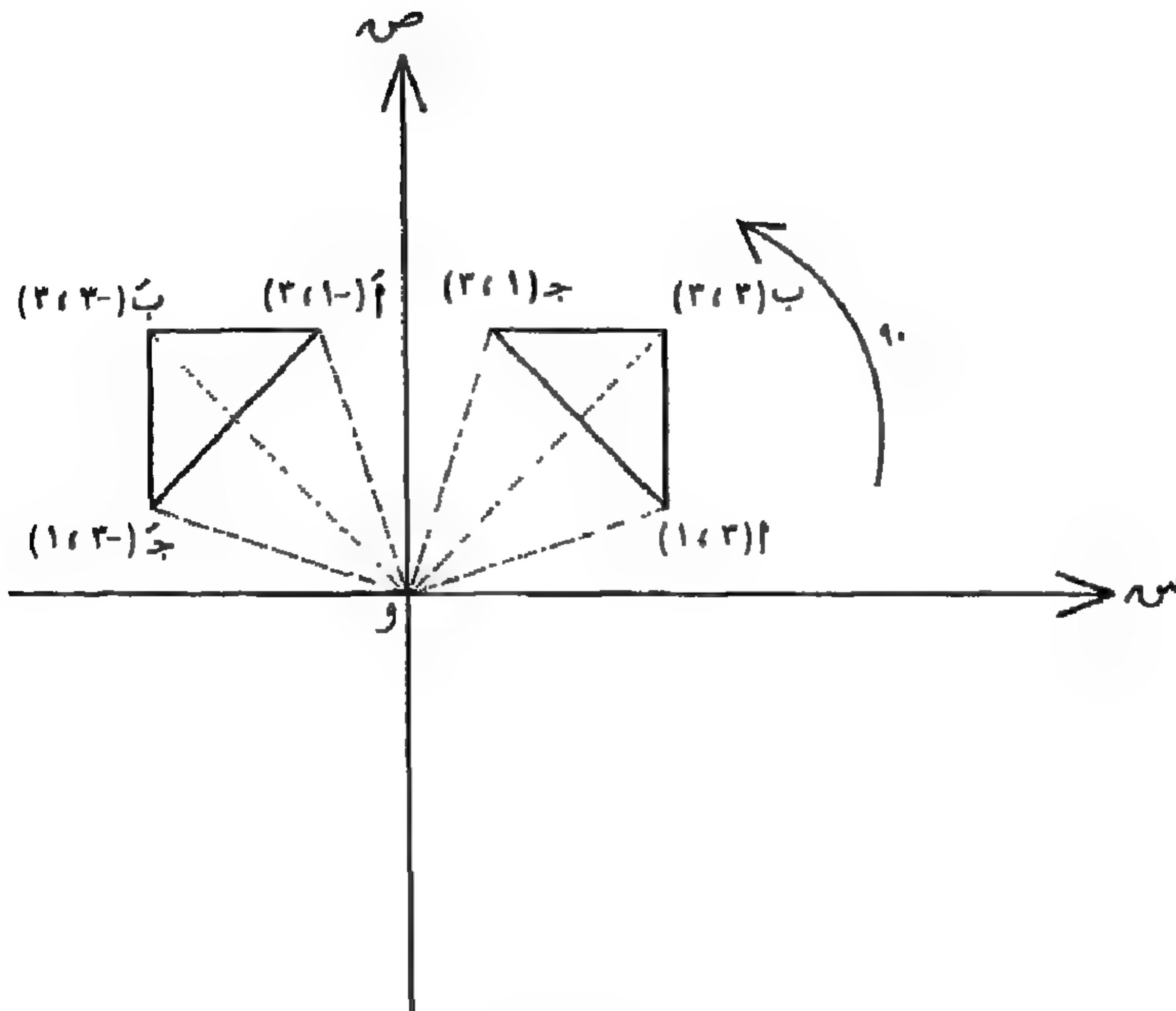
$$(\text{حنا} - \frac{\pi}{2}, \text{حنا} - \frac{\pi}{2}) = (\text{حنا} - \frac{\pi}{2}, \text{حنا} - \frac{\pi}{2}) .$$

مثال (٧) : أوجد صورته المثلث

$$\{ (3,1), (3,3), (1,3) \} = \text{ع}$$

تحت تأثير الراسم من  $90^\circ$

الحل :



شكل (١١-٣)

من شكل (١١-٣) يتضح أن :

$$\{ (1,3-), (3,3-), (3,1-) \} = \text{ع}$$

كذلك :  
 $\angle A = \angle B$  ،  $\angle B = \angle C$  ،  $\angle C = \angle A$   
 أى أن  $\triangle ABC$  هو راسم تساوى قياسى.

كذلك :  
 $\angle A = \angle B$  ،  $\angle B = \angle C$  ،  $\angle C = \angle A$   
 $\angle A = \angle B$  ،  $\angle B = \angle C$  ،  $\angle C = \angle A$

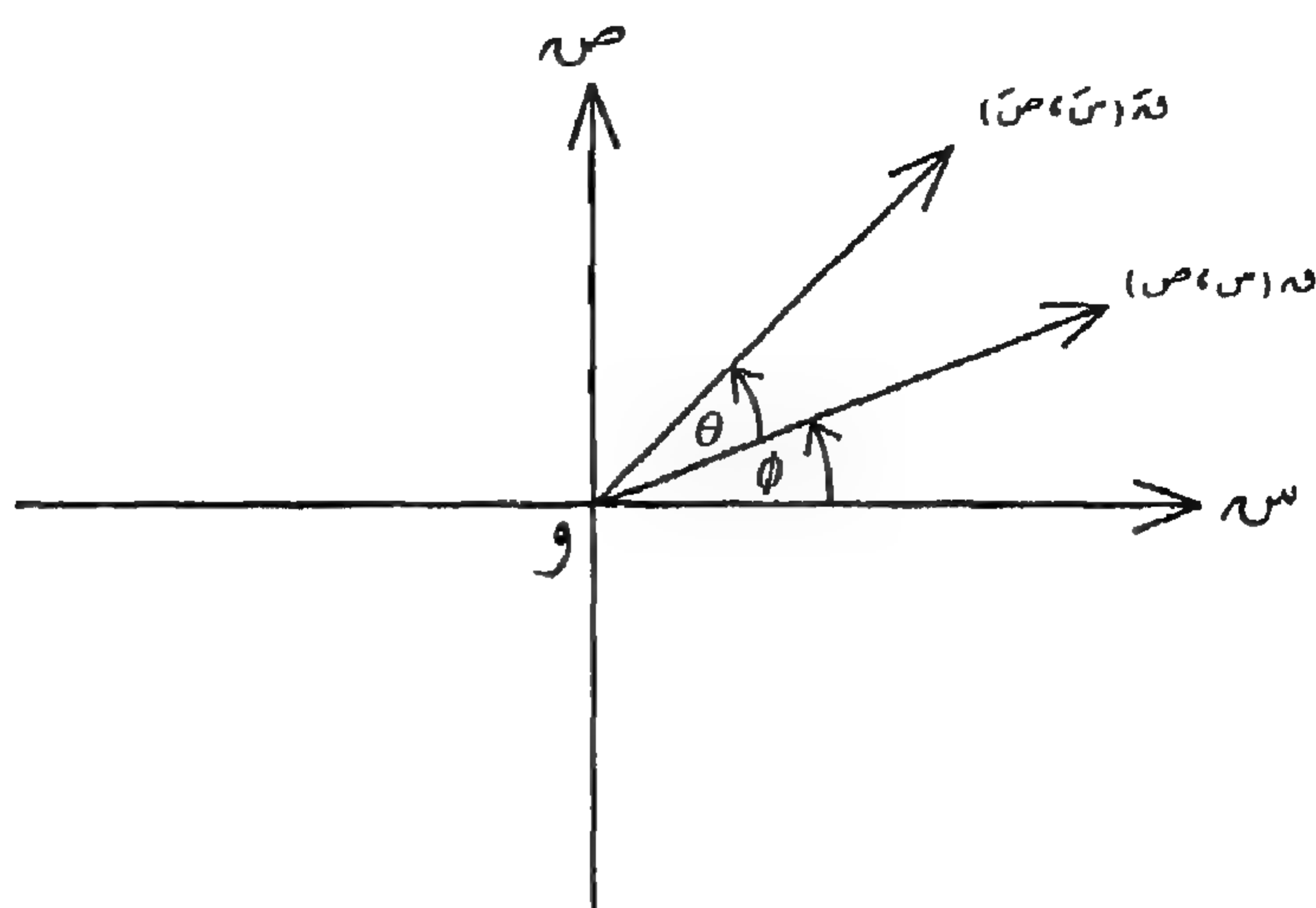
أى أن  $\triangle ABC$  يحفظ مقياس الزوايا .  
 كذلك يتضح لنا من الشكل أن  $\triangle ABC$  هو تحويله مباشرة .

في نهاية هذا البند نستطيع أن نحمل خواص الدوران كالاتى :

- ١- الدوران تحويله هندسية (مستوية) .
- ٢- الدوران تساوى قياسى .
- ٣- الدوران يحفظ مقياس الزوايا .
- ٤- الدوران تحويله مباشرة .
- ٥- الدوران يحفظ البنية واستقامه النقط .
- ٦- مركز الدوران هو النقطة الوحيدة الثابتة للرسم  $\triangle ABC$

### ٣-٤ : مصفوفة الدوران

نفرض أن  $Q$  (ص، س) دح<sup>٢</sup> وأن  $Q$  (ص، س) دح<sup>١</sup> هي صورتها بدوران زاويته  $\theta$  حول  $و$  في إتجاه مضاد لعقارب الساعة .



شكل (٣-١٢)

الاحداثيات القطبيه للنقطه  $ق$  هي (س حتا  $\phi$  ، س حا  $\phi$ )

حيث  $\|وق\|$  ،  $\phi$  هي الزاويه التي يصنعها  $وق$  مع الاتجاه الموجب لمحور السنيات .

الاحداثيات القطبيه للنقطه  $ق$  هي (س حتا  $(\theta + \phi)$  ، س حا  $(\theta + \phi)$ ) .

حيث  $س = \|وق\|$  ،  $(\theta + \phi)$  هي الزاويه التي يصنعها  $وق$  مع الاتجاه الموجب لمحور السنيات .

اذن:

$$س' = س حتا (\theta + \phi)$$

$$= س حتا \phi حتا \theta - س حا \phi حا \theta$$

$$(i) \quad = حتا \theta س - حا \theta ص$$

$$(لأن : س = س حتا \phi ، ص = س حا \phi)$$

أيضا:

$$ص' = س حا (\theta + \phi)$$

$$= \text{س حا} \phi \text{ حتا} \theta + \text{ر حتا} \phi \text{ حا} \theta$$

$$= \text{حتا} \theta \text{ ص} + \text{حا} \theta \text{ س}$$

(ii)

$$= \text{حا} \theta \text{ س} + \text{حتا} \theta \text{ ص}$$

من (i) ، (ii) نحصل على التحويل المصفوفي :

$$\begin{pmatrix} \text{س}' \\ \text{ص}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{حا} - \theta & \text{حتا} \theta \\ \text{حا} & \text{حتا} \theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{حا} - \theta & \text{حتا} \theta \\ \text{حا} & \text{حتا} \theta \end{pmatrix} \quad \text{المصفوفة}$$

تسمى مصفوفة الدوران .

هذه المصفوفة هي مصفوفة تحويل مناظره للدوران مركزه و ، زاويته  $\theta$  .  
ويلاحظ هنا أن محدد هذه المصفوفة يساوي (1+).

ملاحظه (2) :

١- إذا كانت  $\theta = \frac{\pi}{2}$  ، فان مصفوفة الدوران هي :

$$\begin{pmatrix} 1- & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{ع}$$

٢- إذا كانت  $\theta = \pi$  ، فان مصفوفة الدوران هي :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1- \\ 1- & 0 \end{pmatrix} = \text{ن}$$

٣- إذا كانت  $\theta = \frac{3\pi}{2}$  ، فان مصفوفة الدوران هي :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

٤- إذا كانت  $2 = 0$  ط ، فان مصفوفه الدوران هي :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = I$$

مثال (٨) : برهن أن حاصل دورانين حول نفس النقطة هو دوران .

الحل:

نفرض أن :

$$M_{1,0} : (s, v) \leftarrow (s', v')$$

أو

$$\begin{pmatrix} s' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix}$$

ونفرض أن :

$$M_{2,0} : (s', v') \leftarrow (s'', v'')$$

$$(ii) \quad \begin{pmatrix} s'' \\ v'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s' \\ v' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} \quad \text{أو}$$

لا حظ هنا ، ان كل من الدورانين  $M_{1,0}$  ،  $M_{2,0}$  في اتجاه مضاد لعقارب الساعة.



من (i) ، (ii) نحصل على

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

أو

$$(iii) \begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos(\theta + 2\theta) & \sin(\theta + 2\theta) \\ \sin(\theta + 2\theta) & \cos(\theta + 2\theta) \end{pmatrix}$$

أى :

$$(s, v) \leftarrow (s'', v'') \quad \text{حيث } s'' = s \cos \theta + v \sin \theta$$

وبلغة أخرى ، فائنا نكتب

$$\begin{pmatrix} s'' \\ v'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cos \theta + v \sin \theta \\ s \sin \theta + v \cos \theta \end{pmatrix}$$

ملاحظه (3) : معكوس الدوران بزاويه  $\theta$  هو دوران بزاويه  $(-\theta)$  . ففى المثال السابق ، اذا وضعنا

$s = 0$  ،  $v = 0$  ،  $s'' = 0$  ،  $v'' = 0$  فى مصفوفه الدوران الوارده فى (iii) ، فائنا نحصل على :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 0 & \sin 0 \\ -\sin 0 & \cos 0 \end{pmatrix}$$

حيث  $I$  هى مصفوفه الوحده وهذا يثبت المطلوب .

مثال (٩) : باستخدام ضرب المصفوفات ، أثبت أن  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  علماً

بأن الدوران في اتجاه ضد عقارب الساعة .

الحل :

بوضع  $\theta = 0$  ،  $\theta = 0$  في ( iii ) من مثال (٨) نحصل على :

$$\begin{pmatrix} \cos 0 & -\sin 0 \\ \sin 0 & \cos 0 \end{pmatrix}$$

هذه المصفوفة تمثل مصفوفة دوران . أي أنها مصفوفة تحويل مناظرة لدوران مركزه و ،

زاوية  $(0)$  . أي الراسم  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

ملاحظه (٤) : تعميقاً للملاحظه (٣) ، إذا كانت

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

هي مصفوفة التحويل لدوران مركزه و ، وزاوية  $(\theta)$  ، أي الراسم  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

فان

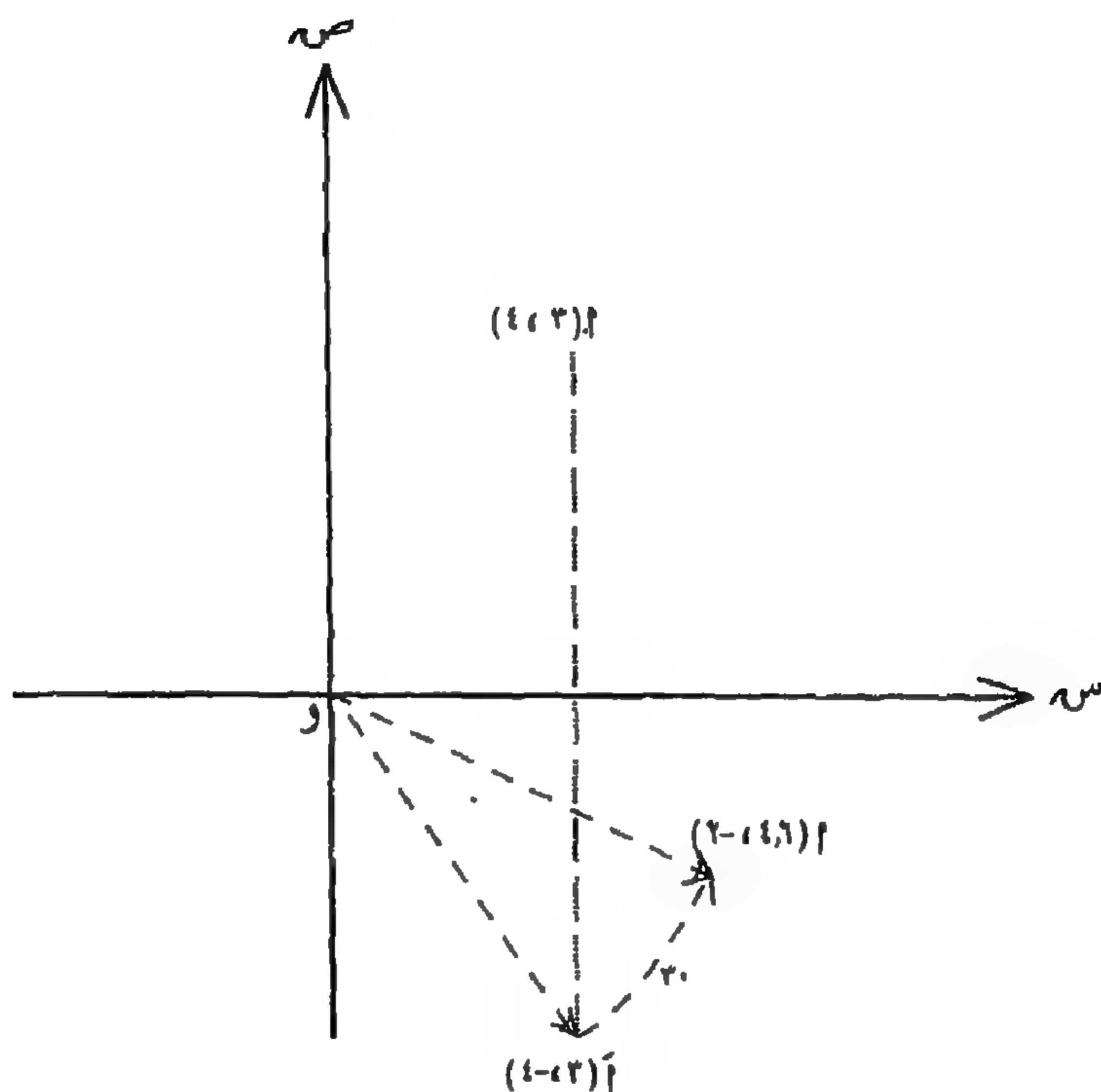
$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$$

هي مصفوفة التحويل العكسيه لدوران مركزه و ، وزاوية  $(-\theta)$  ، أي الراسم

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

مثال (١٠) : أوجد صورته النقطة أ ( ٣ ، ٤ ) بانعكاس في محور السنيات متبوعاً بدوران مركزه نقطة الأصل وزاويته ٣٠ .

الحل :



شكل (٣-١٣)

من الملاحظه (٣) بالباب الثاني ، وجدنا أن مصفوفه الانعكاس بالنسبه الى محور السنيات

هي :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E$$

أيضاً ، مصفوفه الدوران حول نقطة الأصل بزاويه ٣٠ هي :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3.0 \text{ حـ} & 3.0 \text{ حـ} \\ 3.0 \text{ حـ} & 3.0 \text{ حـ} \end{pmatrix} = 12$$

اذن ، مصفوفة التحويل المطلوبة هي :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} =$$

وبالتالى :

$$\begin{pmatrix} \text{س}' \\ \text{ص}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{س}' \\ \text{ص}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + \frac{\sqrt{3}}{2} 3 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} 3 - \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

اذن

$$\text{س}' = 4.59 = 4.6 , \quad \text{ص}' = 1.96 = 2$$

أى أن :

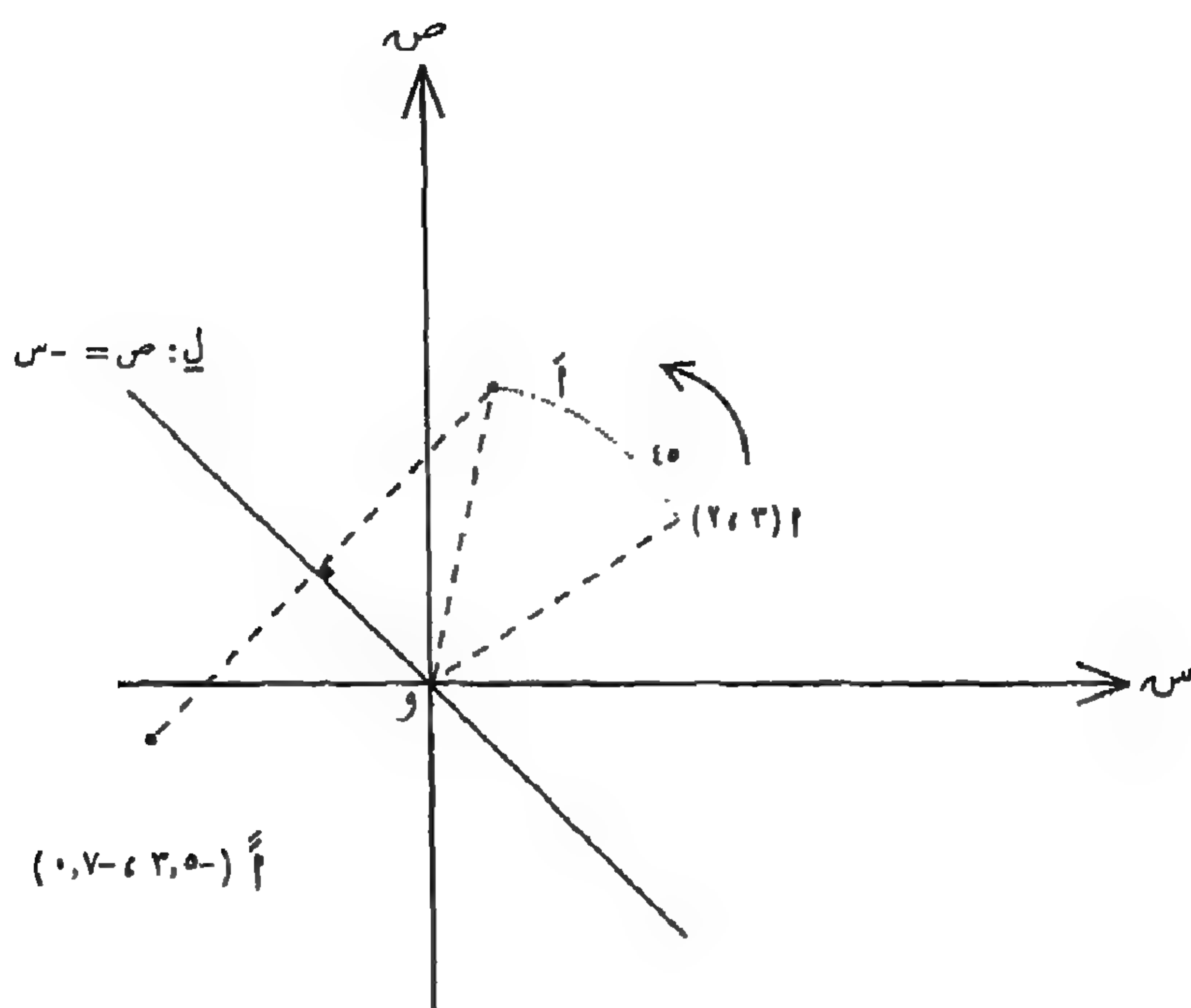
$$(3, 4) \leftarrow (2, 4.6)$$

وهي نفس النتيجة الموضحة بالرسم فى شكل (٣-١٣).

مثال (١١) : أوجد صورته النقطة أ (٢، ٣) بدوران مركزه نقطة الأصل وزاويته ٤٥ متوجهاً بانعكاس في الخط :

$$\underline{ل} = \{ (س، ص) : ص = -س \}$$

الحل :



شكل (٣-١٤)

مصفوفة الدوران حول نقطة الأصل بزاوية ٤٥ هي :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{حنا} ٤٥ & -\text{حنا} ٤٥ \\ \text{حنا} ٤٥ & \text{حنا} ٤٥ \end{pmatrix} = \text{ع} ١٤$$

مصفوفة الانعكاس بالنسبة إلى الخط ل هي :

$$= {}^{\text{ع}2} \begin{pmatrix} 1- & 0 \\ 0 & 1- \end{pmatrix}$$

اذن ، مصفوفة التحويل المطلوبة هي :

$$\text{ع} = \text{ع}2 \cdot \text{ع}1$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}- & \frac{1}{\sqrt{2}}- \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}- & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1- & 0 \\ 0 & 1- \end{pmatrix} =$$

وبالتالى :

$$\begin{pmatrix} \text{س}'' \\ \text{ص}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}- & \frac{1}{\sqrt{2}}- \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}- \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{س}'' \\ \text{ص}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}}- - \frac{3}{\sqrt{2}}- \\ \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}- \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{س}'' = \frac{5}{\sqrt{2}}- = 3,5- \quad \text{ص}'' = 0,7-$$

أى أن :

$$\vec{A} = (2,3) \leftarrow \vec{A}' = (0,7-, 3,5-)$$

انظر الرسم الموضح فى شكل (٣-١٤) .





## تمارين عامه

١- ليكن  $\underline{ل} = \{(س، ص) : ٢س - ٥ص = ٤\}$  ،  $\underline{أ} (١، ٤)$

(أ) هل  $ح (١، ٦)$   $\exists \underline{ل} =$   $سار (ل)$  ؟

(ب) اكتب معادله  $\underline{ل}$

٢- ليكن  $\underline{ع} = \{(س، ص) : ص = س^٢\}$  ،  $\underline{أ} (١، ٣)$  .

(ب) هل  $ب (٣، ٧)$   $\exists \underline{ع} =$   $سار (ع)$  ؟

(ب) اكتب معادله  $\underline{ع}$  .

٣- اذا كان  $\underline{ل} = \{(س، ص) : ص = س\}$  ،  $\underline{م} = \{(س، ص) : ص = ٣ - ٢س\}$  ؛  $ح (٢، ١)$  ،

فأوجد معادله

(أ)  $\underline{ن} = (سار \circ سار) (م)$

(ب)  $\underline{ع} = (سار \circ سار) (ل)$

٤- ليكن  $\underline{ع} = \{(س، ص) : ص = \frac{1}{س}\}$  ،  $\underline{أ} (٢، ٠)$  ،  $\underline{ل}$  هو المحور السيني .

(أ) عند أى قيمه  $ك$  تكون  $جـ (ك، ٦)$   $\exists \underline{ع} =$   $(سار \circ سار) (ع)$  ؟

(ب) اكتب معادله  $\underline{ع}$  .

٥- لتكن  $\underline{أ} (٠، ٠)$  ،  $\underline{ب} (٣، ١)$

(أ) اذا كانت  $جـ (٢، ٤)$  فعين  $جـ =$   $(سار \circ سار) (جـ)$  .

(ب) اذا كانت  $ق (س، ص)$  فعين  $ق =$   $(سار \circ سار) (ق)$

(ج) قارن الأبعاد ح ح " ، ق ق " ، أ ب .

٦- (أ) إذا كانت أدل ، فبرهن أن  $\text{سار} \circ \text{سار} = \text{سار}$  انعكاس . ثم اوصف محور الانعكاس .

(ب) إذا كان ل  $\perp$  م عند أ ، ل  $\perp$  ن عند ب ، برهن أن

$$\text{سار} \circ \text{سار} = \text{سار} \circ \text{سار} = \text{سار} \circ \text{سار} .$$

$$٧- \text{لتكن } \mathcal{C} = \{ (س،ص) : \frac{ص}{١٦} + \frac{س}{٣٦} = ١ \} ;$$

$$\text{أ} - (١،٢) ، \text{ب} - (٢،٣) ، \text{ل} = \{ (س،ص) : ص = س \} .$$

(أ) أوجد صورته ع تحت تأثير التحويله  $\text{سار} \circ \text{سار}$  .

(ب) أوجد صورته ع تحت تأثير التحويله  $\text{سار} \circ \text{سار}$  .

٨- إذا كانت و (٠،٠) ، أ (٠،١) ، فعين إحداثيات .

$$\text{(أ)} \quad \text{سار} \circ \text{سار} \quad \text{(ب)} \quad \text{سار} \circ \text{سار}$$

$$\text{(ج)} \quad \text{سار} \circ \text{سار} \quad \text{(د)} \quad \text{سار} \circ \text{سار}$$

٩- ليكن ل = { (س،ص) : س = ٠ } ، م = { (س،ص) : ص = س } ، و (٠،٠)

أوجد صورته كل من ب (٠،١) ، ح (٣،٠) ، د (٢،٢) ، هـ (٢،٤) تحت تأثير

$$\text{سار} \circ \text{سار} .$$

(ب) عين إحداثيات (  $\text{سار} \circ \text{سار}$  ) ( ق ) ٧ ق (س،ص) .

(ج) اكتب (  $\text{سار} \circ \text{سار}$  ) في صورته تحويله بسيطه .

١٠- عرف دوران حول و (٠،٠) يرسل ب (٠،١) فوق (  $\frac{1}{2} -$  ،  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  )

١١- اذا كانت و (٠،٠)  $\underline{ل} = \{(س،ص) : ص = ٢س \}$  ، فاكتب

$$\underline{ل}' = \underset{٩٠،١}{س} \cdot (\underline{ل})$$

١٢- اذا كانت د دائرة نصف قطرها ٢ ومركزها أ (  $\sqrt{2}$  ،  $\sqrt{2}$  ) واذا كانت ب (٠،٠) فاكتب معادله

$$\underline{ل}' = \underset{٤٥،١}{س} \quad (د)$$

١٣- اذا كان  $\underset{٢٠،١}{س} \circ \underset{١٠،١}{س} = \underset{٥،٢}{س}$  ، فعين  $\theta$  اذا كانت :

$$(أ) \quad ١٣٥ = ٢\theta ، ٣٠ = ١\theta$$

$$(ب) \quad ١٦٠ = ٢\theta ، ٩٠ = ١\theta$$

$$(ج) \quad ١٢٠ = ٢\theta ، ١٥٠ = ١\theta$$

$$(د) \quad ١٣٠ = ٢\theta ، ١٠٠ = ١\theta$$

١٤- حل كل من المعادلات الآتية حيث  $\theta \in [١٨٠- ، ١٨٠+]$  .

$$(أ) \quad \underset{٨٠،٢}{س} = \underset{٥،١}{س} \circ \underset{٣٠،١}{س}$$

$$(ب) \quad \underset{٦٠،١}{س} = \underset{٥،٢}{س} \circ \underset{١٥٠،١}{س}$$

$$(ج) \quad \underset{١٢٠،١}{س} = \underset{٥،٢}{س} \circ \underset{٣٠،١}{س}$$

$$(د) \quad I = \underset{٥،١}{س} \circ \underset{٣٠،١}{س}$$

$$(هـ) \quad \underset{١٦٠،١}{س} = \underset{٥،٢}{س} \circ \underset{٤٠،١}{س}$$

$$(و) \begin{matrix} \text{س} \\ ٦٠،١ \end{matrix} = \begin{matrix} \text{س}^0 \\ ٩٠ - ١٠،ج \end{matrix} \begin{matrix} \text{س}^0 \\ ٥،ب \end{matrix} \begin{matrix} \text{س} \\ ٤٥،د \end{matrix}$$

١٥- اذا كانت أ (٠،٢) ، و (٠،٠) نقط معطاه ؛  $\text{س} = \begin{matrix} \text{س}^0 \\ ٩٠،د \end{matrix}$

(أ) ماهو نوع الراسم  $\text{س}$  ؟

(ب) عين احداثيات جميع النقط  $\text{ق}$  بحيث أن  $\text{س}(\text{ق}) = \text{ق}$  .

١٦- ليكن  $\text{س} = \begin{matrix} \text{س}^0 \\ ٦٠،١ \end{matrix}$  ؛ أ (٠،٠) ، ب (٠،٤) .

(أ) ماهو نوع الراسم  $\text{س}$  ؟

(ب) اذا كانت  $\text{ق}$  أى نقطه ،  $\text{ق}^* = \text{س}(\text{ق})$  ، فعين البعد  $\text{ق}^*\text{ق}$  .

١٧- اذا كانت و (٠،٠) ، أ (٠،١) ، ب (٠،٦) نقط معطاه :

(أ) اكتب معادلات  $\text{ل}$  ،  $\text{م}$  بحيث أن  $\text{س}_\text{م}^0 \text{س}_\text{ل} = \begin{matrix} \text{س} \\ ٩٠،د \end{matrix}$

(ب) اذا كان  $\text{س}$  (ب) = (٤،٤) ، فاكتب معادلات كل من  $\text{ن}$  ،  $\text{ع}$  بحيث أن

$$\text{س}_\text{ع}^0 \text{س}_\text{ن} = \begin{matrix} \text{س} \\ ١، \end{matrix}$$

(ج) أوجد احداثيات مركز الدوران  $\text{س}$   $\begin{matrix} \text{س}^0 \\ ٩٠،د \end{matrix}$

١٨- حقق أن القاعدة :

(س،ص) ← (أس - ب ص ، ب س + أص)

حيث  $\text{أ}^2 + \text{ب}^2 = ١$  ، تمثل دورانا حول نقطه الأصل و .

١٩- أثبت أن  $E = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$  تولف زمرة ، حيث

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{مصفوفة انعكاس في محور الصادرات})$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{مصفوفة انعكاس في محور السنيات})$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{مصفوفه دوران بزاويه } 180^\circ \text{ حول نقطه}$$

الأصل في اتجاه مضاد لعقارب الساعة.

$$E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{مصفوفه دوران بزاويه } 360^\circ \text{ حول نقطه الأصل}$$

في اتجاه مضاد لعقارب الساعة .

هل ع زمرة إبداليه ؟

٢٠- إذا كانت أ (٠،٠) ، ب (٣،١) ، ج (١،٢) هي رؤوس مثلث . أوجد الصورة النهائية للمثلث تحت تأثير انعكاس في محور السنيات متبوعاً بدوران مركزه نقطه الأصل ، وزاويته  $90^\circ$  في اتجاه مضاد لعقارب الساعة .

٢١- أوجد : حنا  $(\theta + \frac{\pi}{2})$  ، حتا  $(\theta - \frac{\pi}{2})$  ، حا  $(\theta - \pi)$  مستخدماً هندسه التحويلات .



## الباب الرابع

### الانتقال

٤-١ : صورة النقطة بالانتقال

تعريف: الراسم  $T$  يسمى انتقال اذا وجدت قطعه مستقيمة موجهه  $\overrightarrow{AB}$  بحيث أن  
 $T(Q) = Q' \vee Q \in H^1, \overrightarrow{Q'Q} = \overrightarrow{AB}$ .

واضح أن كل قطعه مستقيمة موجهه تعين انتقال . سوف نستخدم الرمز  $T_{\overrightarrow{AB}}$  ليعرف انتقال مناظر للقطعه المستقيمة الموجهه  $\overrightarrow{AB}$ .

مثال (١) : اذا كان  $T$  انتقال يرسل  $A(٠,١-)$  فوق  $A'(٣,٣-)$  ،  $B(٢,٤)$  فوق  $B' = (٦,١)$  ،  $C(١,١-)$  فوق  $C' = (٥,٤-)$  ، و  $D(٠,٠)$  فوق  $D' = (٤,٣-)$  ،  
 $E(٤,٣-)$  فوق  $E'(٠,٠)$  . عين قاعدة هذا الانتقال .

الحل

من الشكل (٤-١) يتضح لنا قاعدة هذا الراسم هي :

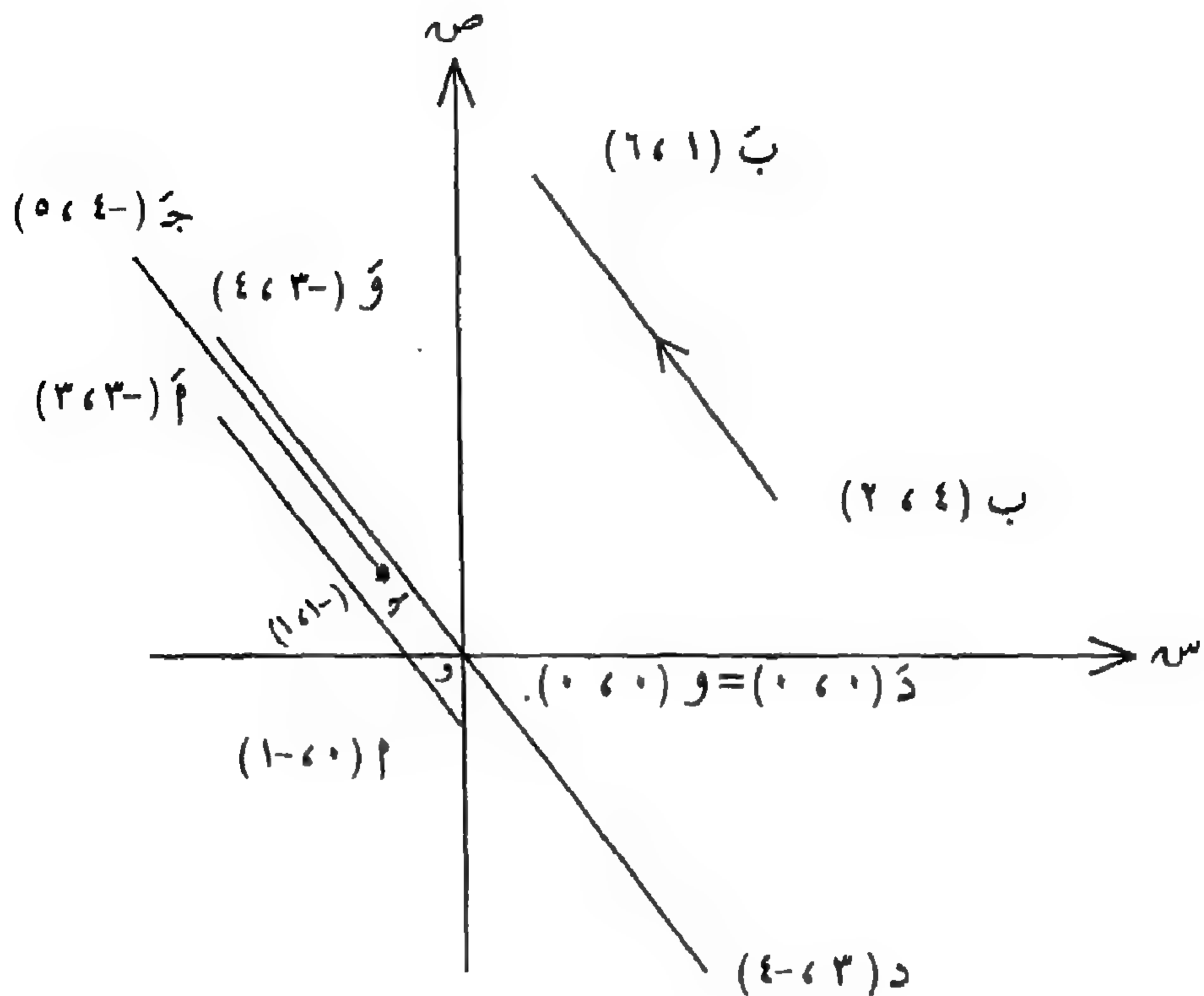
$$T(س, ص) \longleftarrow (س-٣, ص+٤)$$

أو

$$T(س, ص) = (س-٣, ص+٤)$$



كما يتضح لنا من الرسم أن :  
 $l_{\text{أ}} = l_{\text{ب}} = l_{\text{ج}} = l_{\text{د}} = l_{\text{و}} = l_{\text{د د}} = l_{\text{هـ سم}}$  ، كما أنها متوازية .



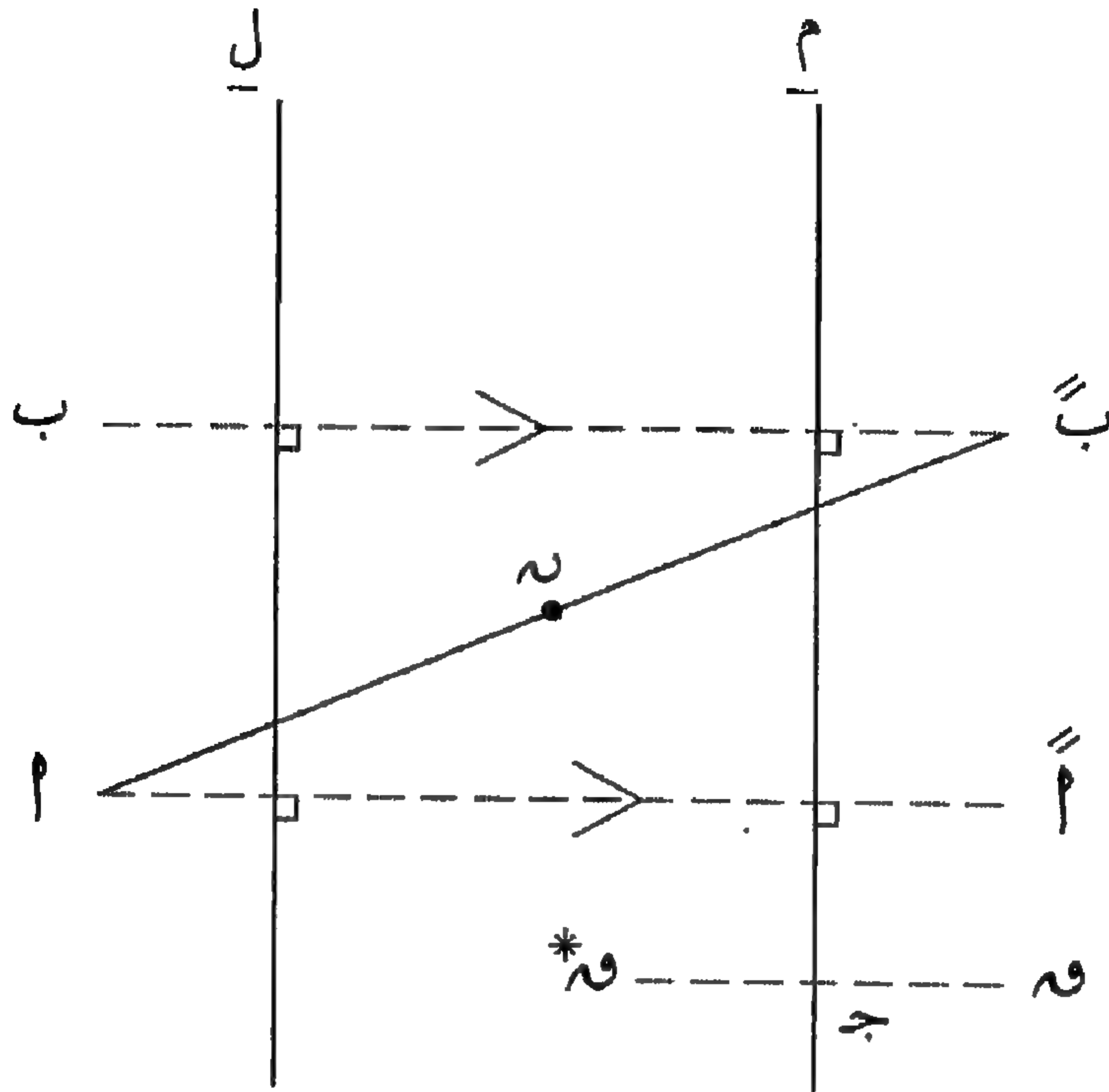
شكل (١-٤)

٢-٤ : خواص الانتقال

حتى نتعرف على خواص الانتقال ، فاننا سنقدم بعض النظريات الهامة التالية :

نظريه (١) : إذا كان  $\underline{ل} // \underline{م}$  ؛  $\underline{أ} \underline{ب}$  نقط معطاه ، فان  $\underline{ب} // \underline{أ}''$  حيث

$\underline{ب}'' = (\underline{م} \text{ م } \underline{ب})$  (ب) ،  $\underline{أ}'' = (\underline{م} \text{ م } \underline{أ})$  (أ)



شكل (٤-٢)

البرهان : نختار  $\underline{ل}$  محورا للصادرات ، ولنأخذ أى خط عمودى على  $\underline{ل}$  محورا للسنيات . لنفرض أن

$\underline{أ}(\underline{أ}_1, \underline{أ}_2)$  ،  $\underline{ب}(\underline{ب}_1, \underline{ب}_2)$

المطلوب اثبات أن : إذا كانت  $\underline{ن}$  منتصف  $\underline{ب}'' \underline{أ}''$  ، فان  $\underline{م} \text{ م } (\underline{ب}) = \underline{أ}''$  .

بما أن  $\underline{م}$  يوازي المحور الصارى ، فان معادلته تصبح  $\underline{س} = \underline{ل}$  ،  $\underline{ل} \neq \underline{ل}$  . وإذا كانت  $\underline{ق}(\underline{س}, \underline{ص})$  أى نقطه

،  $\underline{ق}^* = \underline{م} \text{ م } (\underline{ق})$  ؛ فان  $\underline{ق} \underline{ق}^* \underline{ق}^*$  تقطع  $\underline{م}$  فى النقطه  $\underline{ج}(\underline{ل}, \underline{ص})$  . وبما أن  $\underline{ج}$  منتصف  $\underline{ق} \underline{ق}^*$  ،

فان

$$\underline{ق}^* = \underline{م} \text{ م } (\underline{ق}) = (\underline{ل} - \underline{س} , \underline{ص})$$

لاحظ أيضا ، أن

$$\underline{س}(\underline{ق}) = (-س، ص)$$

اذن

$$(\underline{س} \circ \underline{س}) (\underline{ق}) = \underline{س} (\underline{س}(\underline{ق})) = \underline{س} (-س، ص) \\ = (2س، ص)$$

وبالتالى ، فان

$$\underline{ب}'' = (\underline{س} \circ \underline{س}) (\underline{ب}) = (2ب، 1ب) \\ \underline{ا}'' = (\underline{س} \circ \underline{س}) (\underline{ا}) = (2ا، 1ا)$$

بما أن : ن منتصف  $\underline{ب}''$  ا ، فان

$$ن = \left( \frac{2ا + 1ب}{2} , \frac{2ا + (1ب + 2ب)}{2} \right)$$

باستخدام نظريه (2) بالباب الثالث ، نجد أن

$$\underline{س} ن (\underline{ب}) = (2ا، 1ا + 2ب) = \underline{ا}''$$

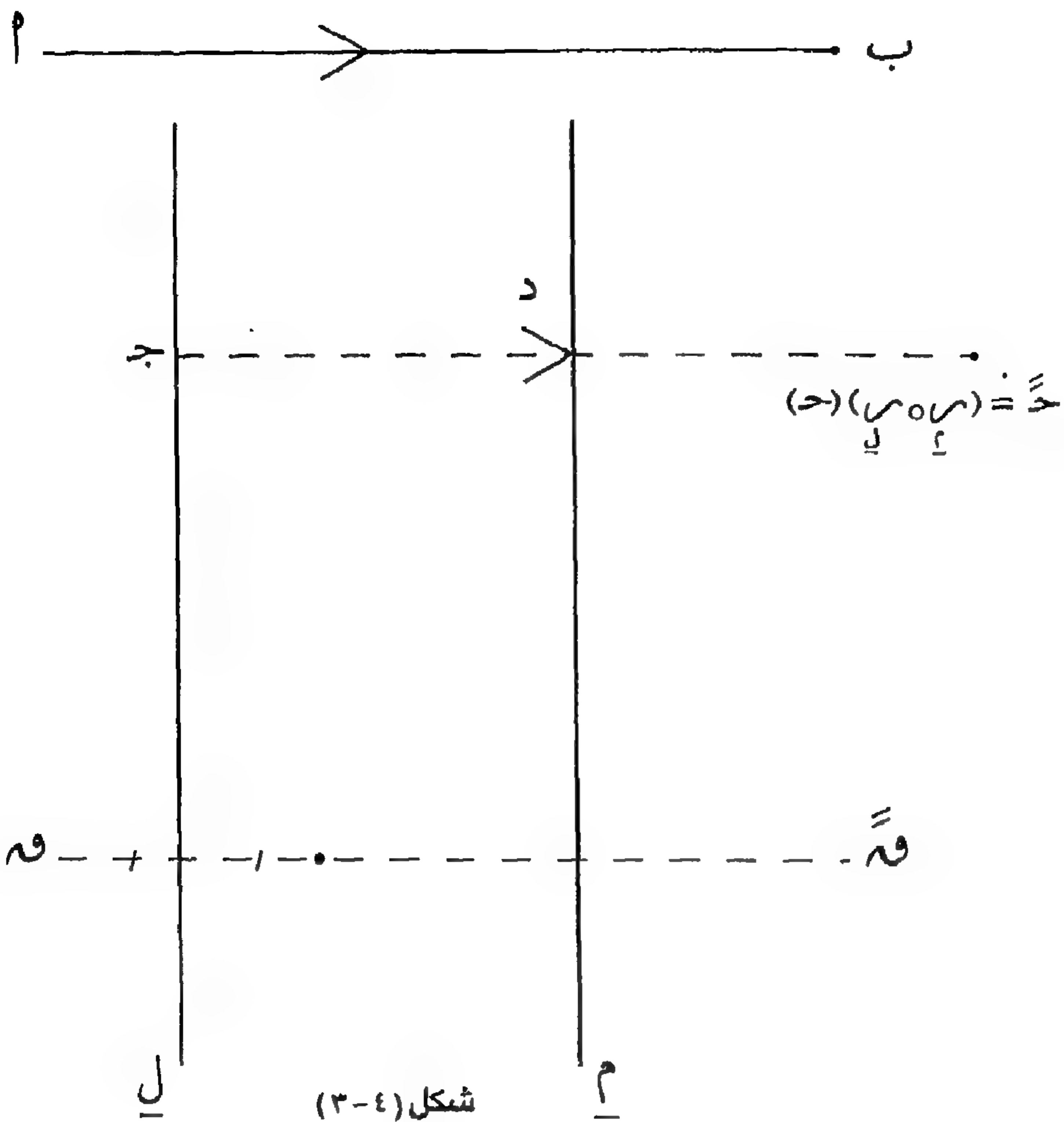
بالتالى ، فان

$$\overleftarrow{\underline{ب}''} \underline{ا}'' = \overleftarrow{\underline{ب}} \underline{ا}$$

نظريه (2) : اذا كانت  $\overleftarrow{\underline{ا}} \underline{ب} = \overleftarrow{\underline{ج}} \underline{د}$  ، فان  $\underline{ا} \underline{ب} = \underline{ج} \underline{د}$

نظريه (3) : ليكن  $\underline{ل} // \underline{م}$  ،  $\overleftarrow{\underline{ج}} \underline{د}$  أى قطعه عموديه على كل من  $\underline{ل}$  ،  $\underline{م}$  .

$$\overleftarrow{\underline{ا}} \underline{ب} = \overleftarrow{\underline{ج}} \underline{د} ، \text{ فان } \underline{ا} \underline{ب} = \underline{س} \circ \underline{س}$$



البرهان :

نفرض أن  $ق$  أى نقطه .

اذن ، اذا كانت  $ق^* = ت_{اب} (ق)$  ،  $ق = (س ه س) (ق)$  ،

فانه يجب علينا اثبات أن  $ق^* = ق$  من تعريف الانتقال  $ت_{اب}$  ينتج أن

لكن :  $أ ب \rightarrow ٢ ج د$  فرضا

اذن

$$\overleftarrow{\text{ق ق}}^* = \overleftarrow{\text{٢ ج د}}$$

(من خاصية التعدي)

إذا كانت جـ = ( س م س ) (جـ)

فان جـ = س (جـ)

اذن ، د منتصف جـ جـ ، وبالتالي تكون جـ جـ = ٢ ج د  
لكن

$$\overleftarrow{\text{ق ق}}^* = \overleftarrow{\text{ج ج}}$$

(من نظريه (١) )

اذن

$$\overleftarrow{\text{ق ق}}^* = \overleftarrow{\text{٢ ج د}}$$

حيث أن ق ق = ٢ ج د ، ق ق = ٢ ج د ؛ فانه ينتج أن ق ق = ق ق

ومن ثم يكون :

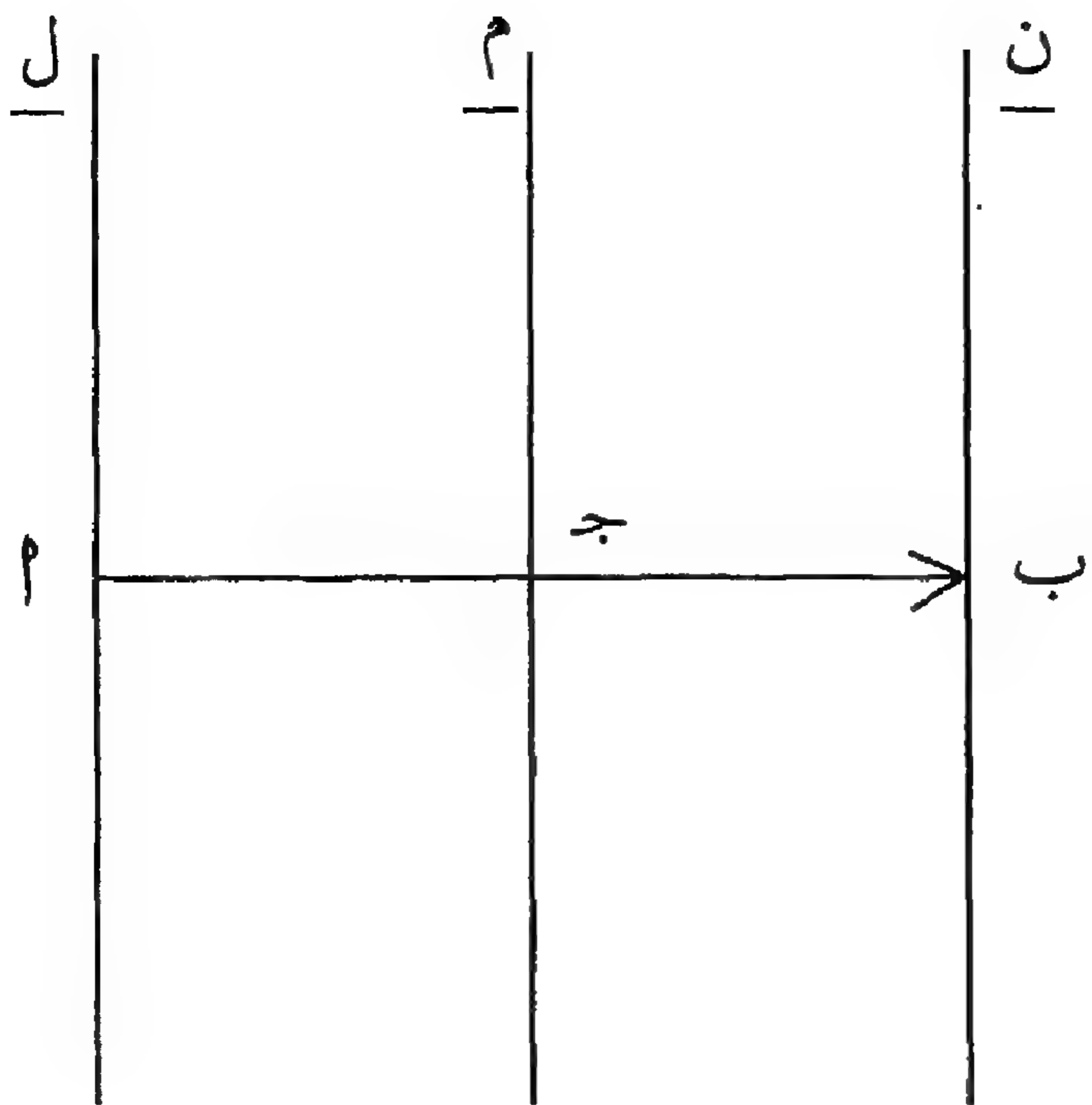
$$\text{ت} \text{ أب} (\text{ق}) = (\text{س} \text{ م} \text{ س}) (\text{ق})$$

$$\text{أو} \quad \text{ت} \text{ أب} = \text{س} \text{ م} \text{ س}$$



نتيجه (١) : إذا كانت لـ ، مـ ، نـ خطوط عموديه على الخط أ ب عند أ ، جـ  
(منتصف أ ب) ، ب على التوالي ، فان

$$\text{ت} \text{ أب} = \text{س} \text{ م} \text{ س} = \text{س} \text{ ن} \text{ س}$$



شكل (٤ - ٤)

نتیجه (٢) : الانتقال هو تساوی قیاسی مباشر .

نتیجه (٣) : اذا كان  $\frac{ت}{أب}$  أي انتقال ، فان  $\frac{ت}{أب} = \frac{ت}{أب}$

البرهان :

لنفرض أن جـ منتصف أ ب ؛ ل ، م ، ن أي خطوط عموديه على أ ب عند  $\longleftrightarrow$   
 أ، جـ ، ب على التوالي .  
 باستخدام نتیجه (١) ، نجد أن

$$\underline{\text{ت}}_{\text{اب}} = \underline{\text{م}}_{\text{ام}} \circ \underline{\text{س}}_{\text{اس}} = \underline{\text{م}}_{\text{ان}} \circ \underline{\text{م}}_{\text{ام}}$$

$$\underline{\text{ت}}_{\text{با}} - \underline{\text{م}}_{\text{ام}} \circ \underline{\text{م}}_{\text{ان}} = \underline{\text{س}}_{\text{اس}} \circ \underline{\text{م}}_{\text{ام}}$$

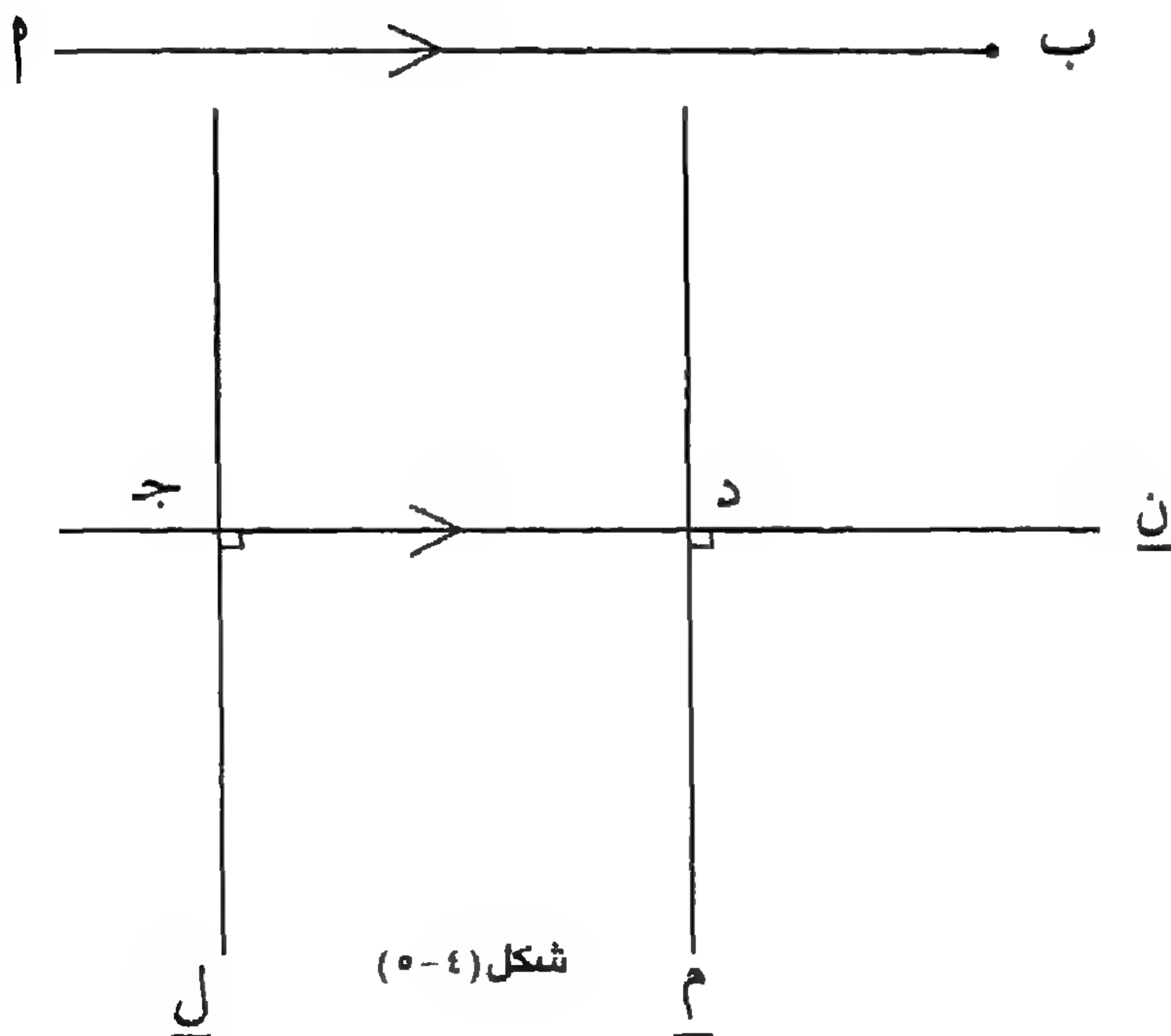
$$\text{اذن } \underline{\text{ت}}_{\text{اب}}^1 = (\underline{\text{م}}_{\text{ان}} \circ \underline{\text{م}}_{\text{ام}})^{-1}$$

$$\underline{\text{م}}_{\text{ام}}^1 \circ \underline{\text{م}}_{\text{ان}}^1 = \underline{\text{م}}_{\text{ام}} \circ \underline{\text{م}}_{\text{ان}} = \underline{\text{ت}}_{\text{با}}^1$$

نظریه (۴): نفرض آن  $\underline{\text{ت}}_{\text{اب}}$  انتقال؛  $\underline{\text{ا}}_{\text{ب}}$  نقطتان بچیت  $\underline{\text{ا}}_{\text{ب}} \rightleftharpoons \underline{\text{ب}}_{\text{ا}}$  .

اذن

$$\underline{\text{ت}}_{\text{اب}} = \underline{\text{م}}_{\text{ام}} \circ \underline{\text{س}}_{\text{اس}}$$







$$\begin{array}{c} \leftarrow \\ \text{جـ هـ} \\ \leftarrow \\ \text{جـ د} \end{array} = \begin{array}{c} \leftarrow \\ \text{أ ب} \\ \leftarrow \\ \text{جـ د} \end{array}$$

باستخدام خاصية التعدى نجد أن :

ومن نظريه (٤) نحصل على أن :

$$\begin{array}{c} \text{ت} \\ \text{أ ب} \end{array} = \text{سـ رـ} \circ \text{سـ جـ}$$

وأن د هي النقطة المطلوبه .

نتيجه (٤) : ليكن  $\begin{array}{c} \text{ت} \\ \text{أ ب} \end{array}$  إنتقال ،  $\text{سـ جـ}$  نصف دوره . اذن

$$\begin{array}{c} \text{ت} \\ \text{أ ب} \end{array} \circ \text{سـ جـ} = \text{سـ رـ}$$

$$\begin{array}{c} \leftarrow \\ \text{أ ب} \\ \leftarrow \\ \text{جـ د} \end{array} = \begin{array}{c} \leftarrow \\ \text{أ ب} \\ \leftarrow \\ \text{جـ د} \end{array}$$

حيث د تحقق أن :

البرهان :

لتكن هي النقطة الوحيدة بحيث أن  $\text{جـ هـ} = \text{أ ب}$  ، ولناخذ د منتصف  $\text{جـ هـ}$ .

$$\begin{array}{c} \leftarrow \\ \text{جـ هـ} \\ \leftarrow \\ \text{جـ د} \end{array} = \begin{array}{c} \leftarrow \\ \text{أ ب} \\ \leftarrow \\ \text{جـ د} \end{array}$$

اذن

وبالتالى

باستخدام نظريه (٤) ، نجد أن

$$\begin{array}{c} \text{ت} \\ \text{أ ب} \end{array} = \text{سـ رـ} \circ \text{سـ جـ}$$

بالتالى يكون

$$\begin{array}{c} \text{ت} \\ \text{أ ب} \end{array} \circ \text{سـ جـ} = (\text{سـ رـ} \circ \text{سـ جـ}) \circ \text{سـ جـ}$$

$$= \text{سـ رـ} \circ (\text{سـ جـ} \circ \text{سـ جـ}) = \text{سـ رـ}$$

نتيجه (٥) : اذا كانت  $\text{سـ رـ}$  ،  $\text{سـ جـ}$  رواسم نصف دوره ، فان

$$\text{سـ جـ} \circ \text{سـ رـ} \circ \text{سـ جـ} = \text{سـ رـ}$$

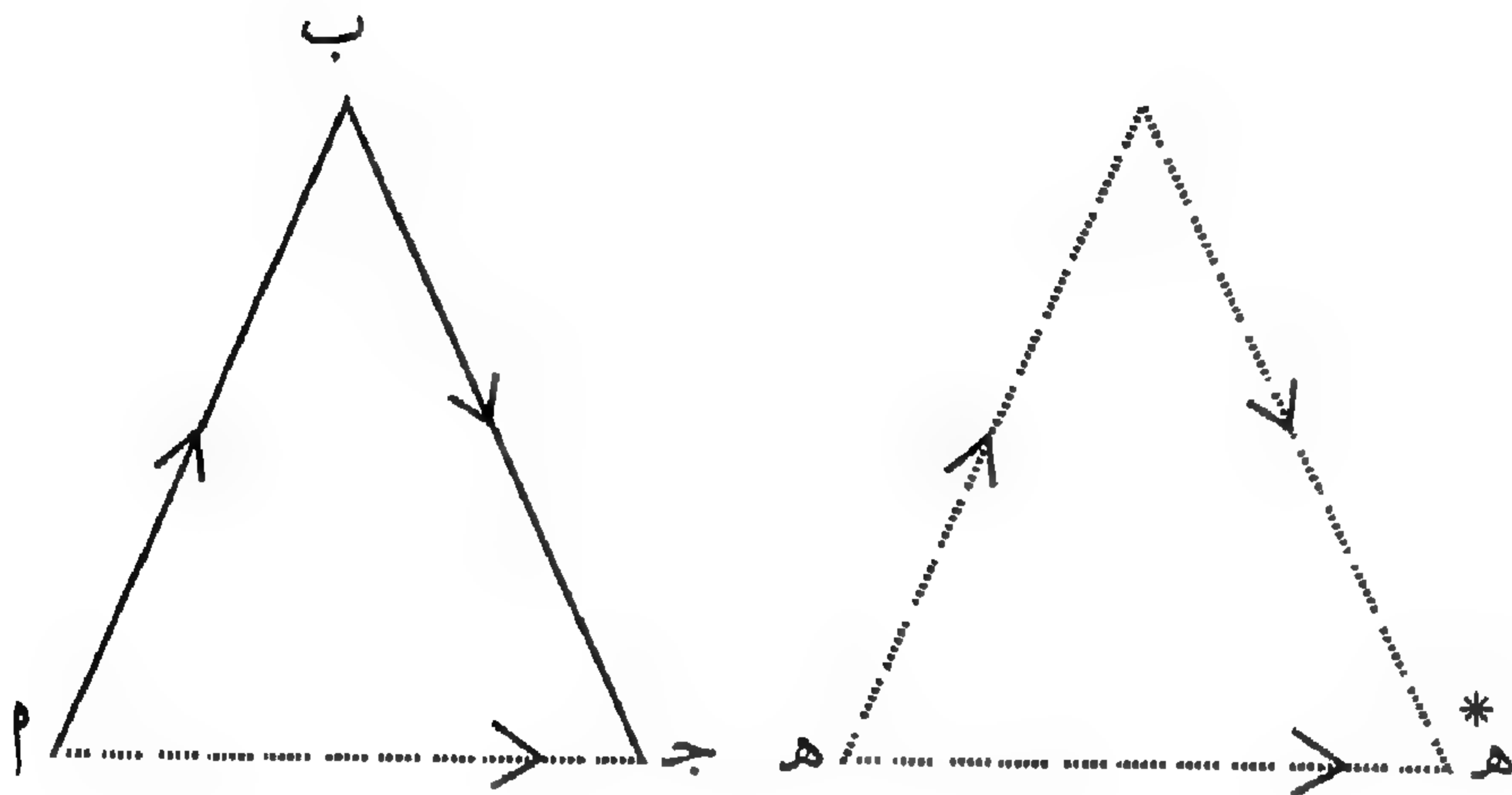


$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

حيث د تحقق أن

برهان هذه النتيجة يترك كتمرين .

نتيجة (٦) : تحصيل انتقالين هو انتقال .



شكل (٤-٦)

في شكل (٤-٦) نلاحظ أن :

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{A} \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{B}$$

باستخدام متوازي الأضلاع ، يمكننا برهان أنه لأي نقطة معطاه ، فان

$$\overrightarrow{A^*B^*} = \overrightarrow{A} \quad \overrightarrow{A^*C^*} = \overrightarrow{B}$$

حيث

$$\overrightarrow{A^*B^*} = \overrightarrow{A} \quad \overrightarrow{A^*C^*} = \overrightarrow{B}$$

وبالتأكيد ، سينتج أن

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{A} \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{B}$$



ملاحظه : اذا كانت جـ د = ب أ ، فان

$$I = \begin{matrix} \text{ت} & \text{ه} & \text{ت} \\ \text{اب} & \text{حد} & \text{اب} \end{matrix}$$

نظريه (ه) : اذا كان  $\begin{matrix} \text{ت} \\ \text{رك} \end{matrix}$  إنتقال حيث و (٠،٠) ، ك(أ،ب) ؛  $\text{ر}$  راسماً معرفاً بالقاعده

$$\text{ر}(\text{ق}) = (\text{س} + \text{أ} , \text{ص} + \text{ب}) \quad \vee \quad \text{ق} \ni \text{ح}^2 ,$$

$$\text{فان} \quad \begin{matrix} \text{ت} \\ \text{رك} \end{matrix} = \text{ر}$$

البرهان :

$$\text{ر}(\text{ق}) = (\text{س} + \text{أ} , \text{ص} + \text{ب}) \quad \vee \quad \text{ق}(\text{س} , \text{ص}) \ni \text{ح}^2$$

نفرض أن

$$\text{ق}^* = \begin{matrix} \text{ت} \\ \text{رك} \end{matrix}(\text{ق})$$

اذن

$$\begin{matrix} \leftarrow & \leftarrow \\ \text{ق} & \text{ق}^* \\ \text{رك} & \text{رك} \end{matrix} \quad \text{و ك}$$

$$\text{اذن} \quad \text{ق}^* - (\text{س} + \text{أ} - , \text{ص} + \text{ب} - ) =$$

$$= (\text{س} + \text{أ} , \text{ص} + \text{ب})$$

$$\text{وبالتالى فان} : \quad \text{ر}(\text{ق}) = \begin{matrix} \text{ت} \\ \text{رك} \end{matrix}(\text{ق})$$

$$\text{أى أن} \quad \begin{matrix} \text{ت} \\ \text{رك} \end{matrix} = \text{ر}$$

من هذه النظرية يتضح أن أى إنتقال يمكن تعريفه لجميع النقط  $\text{ق}(\text{س}, \text{ص})$  بالقاعده

$$\text{ت}(\text{ق}) = (\text{س} + \text{أ} , \text{ص} + \text{ب})$$

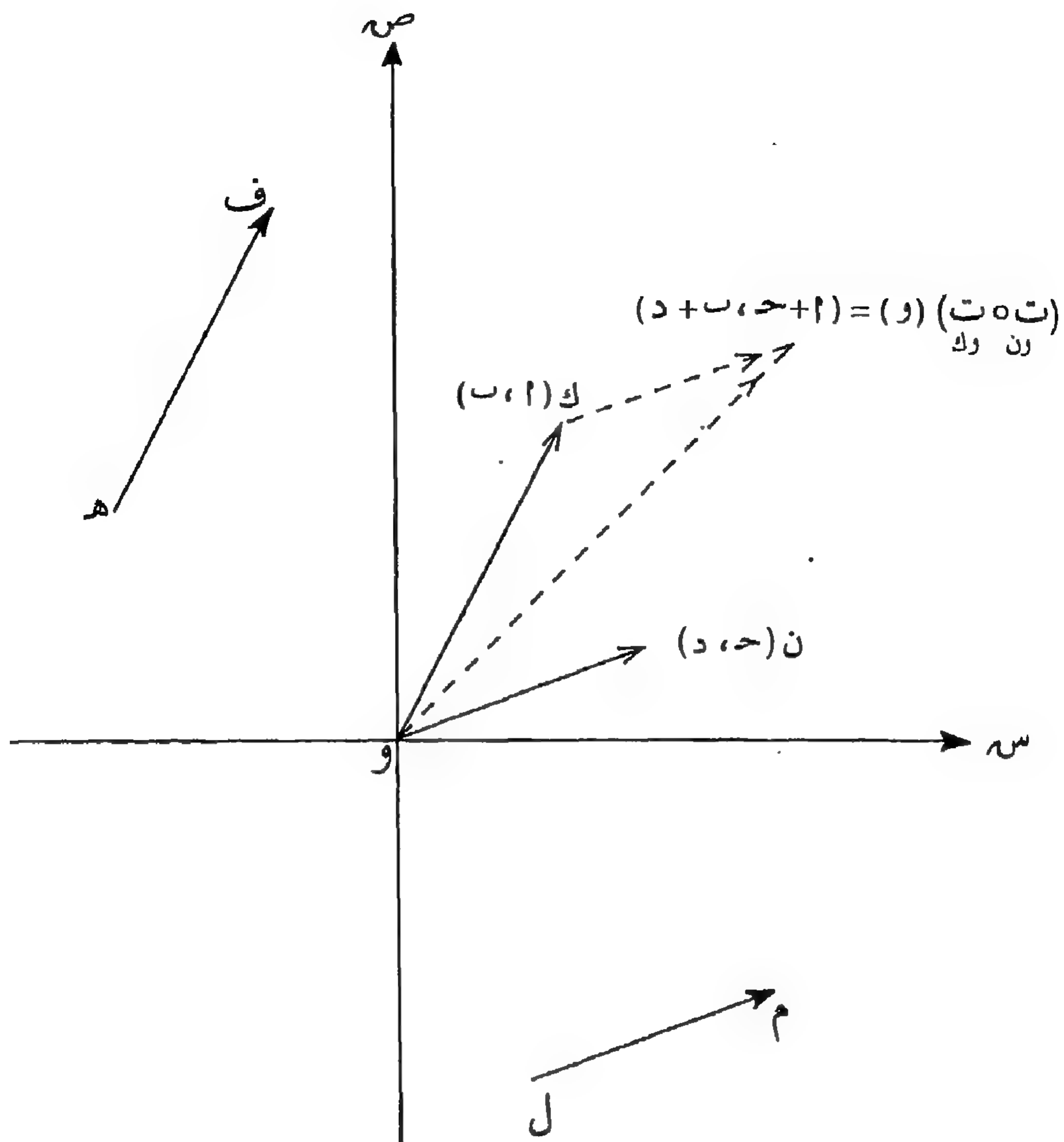
وللحصول على الأعداد أ ، ب فاننا نلاحظ ببساطه إحداثيات صورته نقطه الأصل . وبالتالى اذا كانت

و هى نقطه الأصل ،  $\text{ت}(\text{و}) = (\text{أ}, \text{ب})$  ، فان

$$\text{ت}(\text{ق}) = (\text{س} + \text{أ} , \text{ص} + \text{ب})$$

ولبرهان خاصية الانغلاق للانتقالات ، فاننا سنعتبر أى انتقالين

$$\begin{matrix} \text{ت} & \text{ت} \\ \text{هف} & \text{لم} \end{matrix}$$



شكل (٧-٤)

لنفرض أن  $\vec{K} = (A, B)$  ،  $\vec{N} = (J, D)$  أي نقط بـيـث أن  $\vec{W} = \vec{H} - \vec{F}$  ،  $\vec{W} = \vec{L} - \vec{M}$ .

اذن ، لأي نقطه  $Q$  (س ، ص) يكون

$$\vec{W} = \vec{Q} = (Q) \quad \vec{T} = \vec{Q} = (Q) = (S + A, V + B) ,$$

$$\vec{T}_M = \vec{Q} = (Q) \quad \vec{T}_W = \vec{Q} = (Q) = (S + J, V + D)$$

بالتالى ، فان

$$(ت_م \text{ هـ} ت_هف) (ق) = (ت_و \text{ هـ} ت_و) (ق)$$

$$ت_و = (ت_و) (ق)$$

$$ت_و = (س + أ ، ص + ب)$$

$$= (س + أ) + ج - ، (ص + ب) + د$$

$$= (س + أ + ج -) ، (ص + ب + د)$$

اذن ، من نظريه (هـ) يكون  $ت_م \text{ هـ} ت_هف$  هو انتقال يرسل نقطه الأصل فوق النقطه  
(أ + ج - ، ب + د) .

مثال (٣) : اذا كان  $ت_هف$  انتقال يرسل هـ (٣، ٢) فوق ف (١، ٤) ،  $ت_م$  انتقال يرسل

ل (٤، ٣-) فوق م (٣، ٠)

عين  $(ت_م \text{ هـ} ت_هف) (ق)$  ٧  $ق (س، ص) \ni ح^2$  .

الحل :

ليكن  $ت_و = (و)$  ،  $ت_م = (و)^*$

اذن

$$\begin{array}{ccc} \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow \\ و_و = هـ ف & ، & و_و^* = ل م \end{array}$$

بالتالى :

$$و_و = (٠ + ٢ - ٣ ، ٠ + ٤ - ٢) = (٢ - ، ٢)$$

$$و_و^* = (٠ + ٠ + ٣ ، ٠ + ٣ - ٤) = (٣ ، ١ -)$$

اذن

$$ت_{\text{ل}} (ق) = (س + ٢ ، ص - ٢) ،$$

$$ت_{\text{ل}} (ق) = (س + ٣ ، ص - ١) .$$

ومن ثم يكون :

$$(ت_{\text{ل}} \text{ هـ } ت_{\text{ل}}) (ق) = ت_{\text{ل}} (ت_{\text{ل}}) (ق)$$

$$= ت_{\text{ل}} (س + ٢ ، ص - ٢)$$

$$= (س + (٢ + ٣) ، ص - (٢ - ١))$$

$$= (س + ٥ ، ص - ٣)$$

مثال (٤) : اذا كان  $\underline{ل} = \{(س، ص) : ص = ٣س + ٤\}$  ؛ أ (٢، ٣) ، ب (١-، ٢-) ،

ج (٣ ، ٥) نقط معطاه ، فاكتب معادله

$$\underline{ل} = (ت_{\text{أب}} \text{ هـ } س) (ل) .$$

الحل :

$$ت_{\text{أب}} \text{ هـ } س = س_{\text{أب}}$$



حيث  $أب \cong ٢ ج د$  .

أى أن

$$(٢ - ، ١ -) - (٣ ، ٢) = ٢ (س ، ص) - (٣ ، ٥)$$

(على فرض أن د (س ، ص))

$$(٥ - ، ٣ -) = ٢ (س - ٣ ، ص - ٥)$$

$$\text{أى أن } ٣ - ٢ = ٣ س - ٦ ، ٥ - ٢ = ٥ ص - ١٠$$

$$\text{أو } س = \frac{٣}{٢} ، ص = \frac{٥}{٢}$$

$$\text{أو } د = ( \frac{٣}{٢} ، \frac{٥}{٢} ) .$$



اذن  $\text{سار} (س، ص) = (٣ - س، ٥ - ص)$   
(من قاعده راسم نصف الدوره)

لكن  $\text{ق}_١ (٤، ٠) \exists \underline{\text{ل}}$  ،  $\text{ق}_٢ (١، ٧) \exists \underline{\text{ل}}$

اذن  $\text{سار} (\text{ق}_١) = \text{سار} (٤، ٠) = (١، ٣) = \text{ق}_١$  ؛

$$\text{سار} (\text{ق}_٢) = \text{سار} (١، ٧) = (٢ - ١، ٢ - ٧) = \text{ق}_٢$$

$$\text{ميل } \text{ق}_١ \text{ ق}_٢ = \frac{٢ + ١}{٢ - ٣} = ٣$$

اذن معادله  $\underline{\text{ل}}$ :

$$\text{ص} - ١ = ٣ - \text{س}$$

$$\text{ص} - ١ = ٣ - ٩$$

أى أن

$$\underline{\text{ل}} : \text{ص} = ٣ - ٨$$

أو

$$\underline{\text{ل}} = \{ (س، ص) : \text{ص} = ٣ - ٨ \}$$

حل آخر :

$$\text{أب} \equiv \text{وو}$$

$$(٠، ٠) - (س، ص) = (٢، ٣) - (٢ - ١، ٢ - ٧)$$

$$(س، ص) = (٣ - ٥، ٢ - ٠) = \text{و}$$

$$\text{اذن } \text{ت}_{\text{أب}} (س، ص) = (٣ - س، ٥ - ص)$$

وبالتالى :

$$\text{ت}_{\text{أب}} (٥، ٠) = \text{ق}_١ (١، ٧) \text{ حيث } \text{ق}_١ (٤، ٠) \exists \underline{\text{ل}}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ حيث } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{ميل الخط } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{0 + 0}{0 - 0} = 3$$

اذن :

$$\underline{L} = \{(s, v) : v = 3s - 8\}.$$

مثال (٥) : اذا كانت  $A(3, 4)$  و  $B(9, 8)$  نقط معطاه ، وكانت الدائره

$$C = \{(s, v) : s^2 + v^2 = 1\}.$$

فأوجد صورته هذه الدائره بالانتقال  $T$ .

الحل :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(9, 8) - (3, 4) = (6, 4) = (s^*, v^*) - (0, 0)$$

$$(6, 4) = (s^*, v^*) = (0, 0)$$

اذن

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ حيث } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

وحيث أن :  $(\text{حنا } \theta, \text{حا } \theta) \ni \gamma$

اذن

$$\begin{matrix} \text{ت} \\ \text{أب} \end{matrix} (\text{حنا } \theta, \text{حا } \theta) = (\text{حنا } \theta + 0, \text{حا } \theta + 0) = (\text{حنا } 0, \text{حا } 0) = (\text{س}^*, \text{ص}^*)$$

أي أن :

$$\text{س}^* = \text{حنا } \theta + 0, \quad \text{ص}^* = \text{حا } \theta + 0$$

ويحذف البارامتر  $\theta$  نحصل على :

$$1 = (\text{س}^* - 0) + (\text{ص}^* - 0)$$

وهي معادلة دائره مركزها  $(0, 0)$  ونصف قطرها  $1$

وبالتالى ، فان

$$\gamma = \{(\text{س}, \text{ص}) : (\text{س} - 0) + (\text{ص} - 0) = 1\}$$

مثال (٦) : اذا كانت  $A(-4, 0)$  ،  $B(-6, 9)$  ،  $C(3, -3)$  نقط معطاه .

أوجد صورته :

$$\gamma = \{(\text{س}, \text{ص}) : \frac{\text{س}}{16} + \frac{\text{ص}}{4} = 1\}$$

تحت تأثير التحويله  $\begin{pmatrix} \text{ت} \\ \text{أب} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  .

الحل:

$$\begin{matrix} \leftarrow & \leftarrow \\ \text{أب} & = & \text{ور}^* \end{matrix}$$

$$(\text{س}^*, \text{ص}^*) = (-6, 9) - (-4, 0)$$

$$\text{ر}^* = (\text{س}^*, \text{ص}^*) = (-2, 9)$$

اذن :

$$(i) \quad \begin{matrix} \text{ت} \\ \text{أب} \end{matrix} = (\text{ق}) = \begin{matrix} \text{ت} \\ \text{أب} \end{matrix} (\text{س}, \text{ص}) = (\text{س} - 2, \text{ص} + 9)$$

$$(ii) \quad \begin{matrix} \text{س} \\ \text{ح} \end{matrix} (\text{ق}) = \begin{matrix} \text{س} \\ \text{ح} \end{matrix} (\text{س}, \text{ص}) = (-6 - \text{س}, -3 - \text{ص})$$

وحيث أن :

$$(\text{حنا } 2\theta, \text{حا } 2\theta) \ni \gamma$$

اذن:

$$\begin{aligned}
 (ت \text{ هـ } \text{س}) (٤ \text{ حتا } \theta, ٢ \text{ حتا } \theta) &= (ت \text{ هـ } \text{س}) (٤ \text{ حتا } \theta, ٢ \text{ حتا } \theta) \\
 (ت \text{ هـ } \text{س}) &= (٤ \text{ حتا } \theta, ٢ \text{ حتا } \theta) \\
 (٤ \text{ حتا } \theta, ٢ \text{ حتا } \theta) &= (٤ \text{ حتا } \theta, ٢ \text{ حتا } \theta) \\
 (٤ \text{ حتا } \theta, ٢ \text{ حتا } \theta) &= (٤ \text{ حتا } \theta, ٢ \text{ حتا } \theta) \\
 (س', ص') &=
 \end{aligned}$$

بالتالي :

$$س' = ٤ - \theta, ص' = ٢ - \theta$$

أو

$$س' = ٤ - \theta, ص' = ٢ - \theta$$

وبحذف البارامتر  $\theta$  نحصل على :

$$١ = \frac{(٢ + ص')^2}{٤} + \frac{(٤ - س')^2}{١٦}$$

أو نكتب :

$$\{١ = \frac{(٢ + ص')^2}{٤} + \frac{(٤ - س')^2}{١٦} : (س', ص')\}$$

وهي تمثل قطع ناقص مركزه  $(٢, ٤)$  .

مثال (٧) : اذا كانت  $أ (٥, ١)$  ،  $ب (١, ١)$  ، و  $و (٠, ٠)$  نقط معطاه .  
أوجد صوره

$$\{١ = \frac{(٤ - ص')^2}{١٦} + \frac{(٨ - س')^2}{٣٦} : (س', ص')\}$$

تحت تأثير التحويله (س، ٥ س) ٥ ت أب

حيث ل = { (س، ص) : ص = س }

الحل :

$$\leftarrow \leftarrow$$

$$\text{أب} \equiv \text{وو}^*$$

$$(س^*، ص^*) = (٠، ٥) - (٠، ١)$$

$$و = (س^*، ص^*) - (٠، ٤)$$

اذن :

$$\text{ت} \text{ أب} = (\text{ق}) \text{ ت} \text{ أب} = (س، ص) = (س-٤، ص)$$

وحيث أن :

$$(٦ \text{ حتا } \theta + ٨، ٤ \text{ حتا } \theta + ٤) \supset$$

اذن

$$(س، ٥ س) \text{ ت} \text{ أب} = (٦ \text{ حتا } \theta + ٨، ٤ \text{ حتا } \theta + ٤)$$

$$= (س، ٥ س) \text{ ت} \text{ أب} = (٦ \text{ حتا } \theta + ٨، ٤ \text{ حتا } \theta + ٤)$$

$$= (س، ٥ س) \text{ ت} \text{ أب} = (٦ \text{ حتا } \theta + ٨، ٤ \text{ حتا } \theta + ٤)$$

$$= (س، ٥ س) \text{ ت} \text{ أب} = (٦ \text{ حتا } \theta + ٨، ٤ \text{ حتا } \theta + ٤)$$

$$= (س، ٥ س) \text{ ت} \text{ أب} = (٦ \text{ حتا } \theta + ٨، ٤ \text{ حتا } \theta + ٤)$$

$$= (س، ٥ س) \text{ ت} \text{ أب} = (٦ \text{ حتا } \theta + ٨، ٤ \text{ حتا } \theta + ٤)$$

أى أن :

$$س' = ٤ - \theta، ص' = ٦ - \theta$$

أو

$$س' = ٤ - \theta، ص' = ٦ - \theta$$

وبعذف البارامتر  $\theta$  نحصل على :

$$1 = \frac{ص(ع+ص)}{٣٦} + \frac{س(ع+س)}{١٦}$$

أو نكتب :

$$\{1 = \frac{ص(ع+ص)}{٣٦} + \frac{س(ع+س)}{١٦} : (س،ص)\}$$

في نهاية هذا البند ، نستطيع أن نحمل خواص الانتقال كالاتى :

١- الانتقال تحويلة هندسيه (مستويه)

٢- الانتقال تساوى قياسى.

٣- الانتقال يحفظ مقياس الزوايا .

٤- الانتقال تحويلة مباشرة .

٥- الانتقال ليس له نقطه ثابتة إلا إذا كان الانتقال هو الراسم المحايد .

٦- الانتقال يحفظ البينيه واستقامه النقط والتوازى.

٤-٣ : مصفوفه الانتقال

من نظريه (٥) وجدنا أن :

$$\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} س & ص \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$$

حيث ك = (أ،ب) ، و نقطه الأصل .

$$\text{أى : } \begin{pmatrix} س & ص \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} س & ص \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$$

بالتالى :

$$س = س + أ ، ص = ص + ب$$

ويعبر عن ذلك كالاتى :

$$\begin{pmatrix} ١ \\ ٠ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$$

توضيح ذلك ، فى المثال التالى .

مثال (٨) : اذا كان ت انتقال يرسل هـ (٥،٤) فوق ف (٥،٨) ، فأوجد

ت هـ (٢،١-)

الحل:

$$\leftarrow \leftarrow$$

هـ ف = و\*

$$(0,0) - (س^*, ص^*) = (5,4) - (5,8)$$

$$*و = (س^*, ص^*) = (0,4)$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1- \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س^* \\ ص^* \end{bmatrix} \quad \text{اذن :}$$

$$\text{أو } (س^*, ص^*) = (2,3)$$

أى أن

$$(2,3) = (2,1-) \text{ ت هـ}$$

مثال (٩) : اذا كان أ (١-،٤) ، ب (٢،٣) نقط معطاه ، وكانت الدائره

$$\Delta = \{(س, ص) : س^2 + ص^2 = ٤\}$$

فأوجد صورته هذه الدائره بالانتقال ت

$$\leftarrow \leftarrow$$

أب = و\*

$$(0,0) - (س^*, ص^*) = (1-, 4) - (2,3)$$

$$*و = (س^*, ص^*) = (3,1-)$$

$$\begin{bmatrix} 1- \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\cos\theta \\ 2\sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س^* \\ ص^* \end{bmatrix} \quad \text{اذن :}$$

$$\begin{bmatrix} 1- + 2\cos\theta \\ 3 + 2\sin\theta \end{bmatrix} =$$

$$\text{أو } س' = 2 \text{ حتا } 1 - \theta \quad , \quad ص' = 2 \text{ حتا } 3 + \theta$$

ونعذف البارامتر  $\theta$  نحصل على :

$$\xi = (1 + س') + (3 - ص')$$

أو نكتب :

$$\xi = (س', ص') : (1 + س') + (3 - ص')$$

مثال (١٠) : إذا كانت هـ  $(-3, 4)$  ، ف  $(0, 6)$  ، و  $(0, 0)$  نقط معطاه .

أوجد صورته :

$$\xi = (س', ص') : \frac{س'}{16} - \frac{ص'}{4} = 1$$

تحت تأثير التحويلة (ت ٥ سر) .

الحل:

$$\text{هـ} - \text{ف} = \text{و}^*$$

$$(0, 0) - (6, 0) = (-3, 4) - (0, 6)$$

$$\text{و}^* = (س', ص') = (2, 3)$$

وحيث أن  $(4\text{قا}\theta, 2\text{طا}\theta)$  د ع ، فإن

$$\begin{bmatrix} 4\text{قا}\theta \\ 2\text{طا}\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1- \\ 1- & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س' \\ ص' \end{bmatrix}$$

(i)

$$\begin{bmatrix} 4\text{قا}\theta - \\ 2\text{طا}\theta - \end{bmatrix} =$$

بالتالي ، فإن :

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} س' \\ ص' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س'' \\ ص'' \end{bmatrix}$$



$$(ii) \quad \begin{pmatrix} 3 + \theta \text{قا} 4 - \\ 2 + \theta \text{طا} 2 - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \theta \text{قا} 4 - \\ \theta \text{طا} 2 - \end{pmatrix} =$$

أى أن

$$3 + \theta \text{قا} 4 - = \text{ص}'' , \quad 2 + \theta \text{طا} 2 - = \text{ص}''$$

ومنها

$$\theta \text{طا} = (2 - \text{ص}'') \frac{1}{2} - , \quad \theta \text{قا} = (3 - \text{ص}'') \frac{1}{4} -$$

ويجذف البارامتر  $\theta$  نحصل على :

$$1 = \frac{(2 - \text{ص}'')^2}{4} - \frac{(3 - \text{ص}'')^2}{16}$$

أو نكتب :

$$\{ \text{ع} = (\text{ص}'', \text{ص}'') : 1 = \frac{(2 - \text{ص}'')^2}{4} - \frac{(3 - \text{ص}'')^2}{16} \}$$

## تمارين عامه

١- اذا كان  $T$  انتقال يرسل  $A(2,3)$  فوق  $A(3,2)$  ،  $B(0,0)$  فوق  $B(-1,1)$  ،  
 $C(-1,4)$  فوق  $C(-2,3)$  . عين قاعده هذا الانتقال .

٢- اثبت أنه اذا كان  $T$  انتقالاً قاعدته

$$(S, V) \leftarrow (2A + S, 2B + V)$$

فان معكوسه يكون انتقالاً قاعدته

$$(S, V) \leftarrow (S - 2A, V - 2B)$$

٣- بين صحه أو خطأ مايلي :

$$(أ) \quad T_{AB} = S_{AB} \circ S_{AB}^{-1} = T_{BA}$$

$$(ب) \quad T_{AB} \circ T_{AB} = T_{AB}$$

(ج) اذا كانت  $C$  منتصف  $AB$  ، فان

$$(أ) \quad T_{AB} = (C) = T_{BA}$$

$$(ع) \quad L'' = (T_{AB} \circ S_{AB}) (L) = L // L'.$$

٤- اذا كانت  $A(2,3)$  ،  $B(-4,7)$  نقط معطاه ، فاكتب معادله كل من الخطوط  $L$ ،  $M$  بحيث أن

$$S_{AB} \circ S_{AB}^{-1} = T_{AB}$$

٥- اذا كانت أ(٣،١) ، ب(١-،٥) ، جـ(٤،٢) نقطه معطاه :

(أ) عين جـ' =  $\frac{ت}{أب}$  (جـ)

(ب) اكتب معادلات الخطوط لـ  $\underline{م}$  بحيث أن جـ د لـ ،  $\underline{س} \text{ م} \text{ س} = \frac{ت}{أب}$

٦- اذا كانت أ(١،٢) ، ب(٣-،٥) نقطه معطاه ، ت انتقال يرسل أ فوق ب :

(أ) أوجد ت (جـ) اذا كانت جـ = (٢،٤) .

(ب) اذا كانت ق(س ، ص) أى نقطه ، فعين ت (ق) .

٧- اذا كان  $\overleftarrow{أب} = \overleftarrow{جـ د}$  ، فبرهن أن  $\frac{ت}{أب} = \frac{ت}{جـ د}$  .

٨- اذا وجدت نقطه ك بحيث أن  $\frac{ت}{ب} = \frac{ت}{ك}$  ، فبرهن أن  $\frac{ت}{ب} = \frac{ت}{د}$

٩- اذا كان ت انتقال معرف بالقاعده

ت (س،ص) = (س+٢ ، ص+٣) .

وكانت جـ(١-،٧) نقطه معطاه ، فعين إحداثيات د بحيث أن

$\frac{ت}{س} = \frac{ت}{د}$

١٠- اذا كانت أ(١،٠) ، ب(٢،٥) ، جـ(٣،٨) نقطه معطاه ، فعين إحداثيات د حيث أن

$\frac{ت}{د} = \frac{س}{س} = \frac{ص}{ص}$

١١- لتكن أ(١،٢) ، ب(٣-،٥) نقطه معطاه .

(أ) عين (س<sub>١</sub> ، س<sub>٢</sub>) (ق) اذا كانت ق(س،ص) أى نقطه .

(ب) اكتب معادله كـ = (س<sub>١</sub> ، س<sub>٢</sub>) (د) اذا كانت

$\{ (س،ص) : س^٢ + ص^٢ = ٤ \}$

١٢- اذا كان  $\underline{ل} = \{(س،ص) : ص = س - ٤\}$  ؛ أ(٢،١) ، ب(١-،٢-) ، ج(١،٣)

نقط معطاه ، فاكتب معادله  $\underline{ل}$  حيث

$$\underline{ل} = (ت \text{ } ٥ \text{ } س \text{ } ٥ \text{ } هـ) \underline{ل}$$

١٣- اذا كانت أ (١،١) ، ب (ب١، ب٢) نقط معطاه ، وكانت الدائره

$$\Delta = \{(س،ص) : س^2 + ص^2 = ٢\}$$

فأوجد صوره هذه الدائره بالانتقال ت  
اب

١٤- اذا كانت هـ (س١، ص١) ، ف (س٢، ص٢) ، جـ (س٣، ص٣) نقط معطاه .

أوجد صوره :

$$\Delta = \{(س،ص) : \frac{س^2}{٢١} + \frac{ص^2}{٢٢} = ١\}$$

تحت تأثير التحويله (ت ٥ هـ) .

١٥- اذا كانت هـ (س١، ص١) ، ف(س٢، ص٢) ، و(٠،٠) نقط معطاه .

أوجد صوره :

$$\Delta = \{(س،ص) : \frac{(س-٢)^2}{٢١} + \frac{(ص+٣)^2}{٢٢} = ١\}$$

تحت تأثير التحويل (س١، ص١) ٥ (ت ٥ هـ) ، حيث

$$\underline{ل} = \{(س،ص) : ص = -س\} .$$

١٦- اذا كانت هـ (١،٥) ، ف(٢،٧) ، و(٠،٠) نقط معطاه .

أوجد صوره

$$\Delta = \{(س،ص) : \frac{س^2}{٣٦} - \frac{ص^2}{٤} = ١\}$$

تحت تأثير التحويله (ت ٥ س١) .



## الباب الخامس

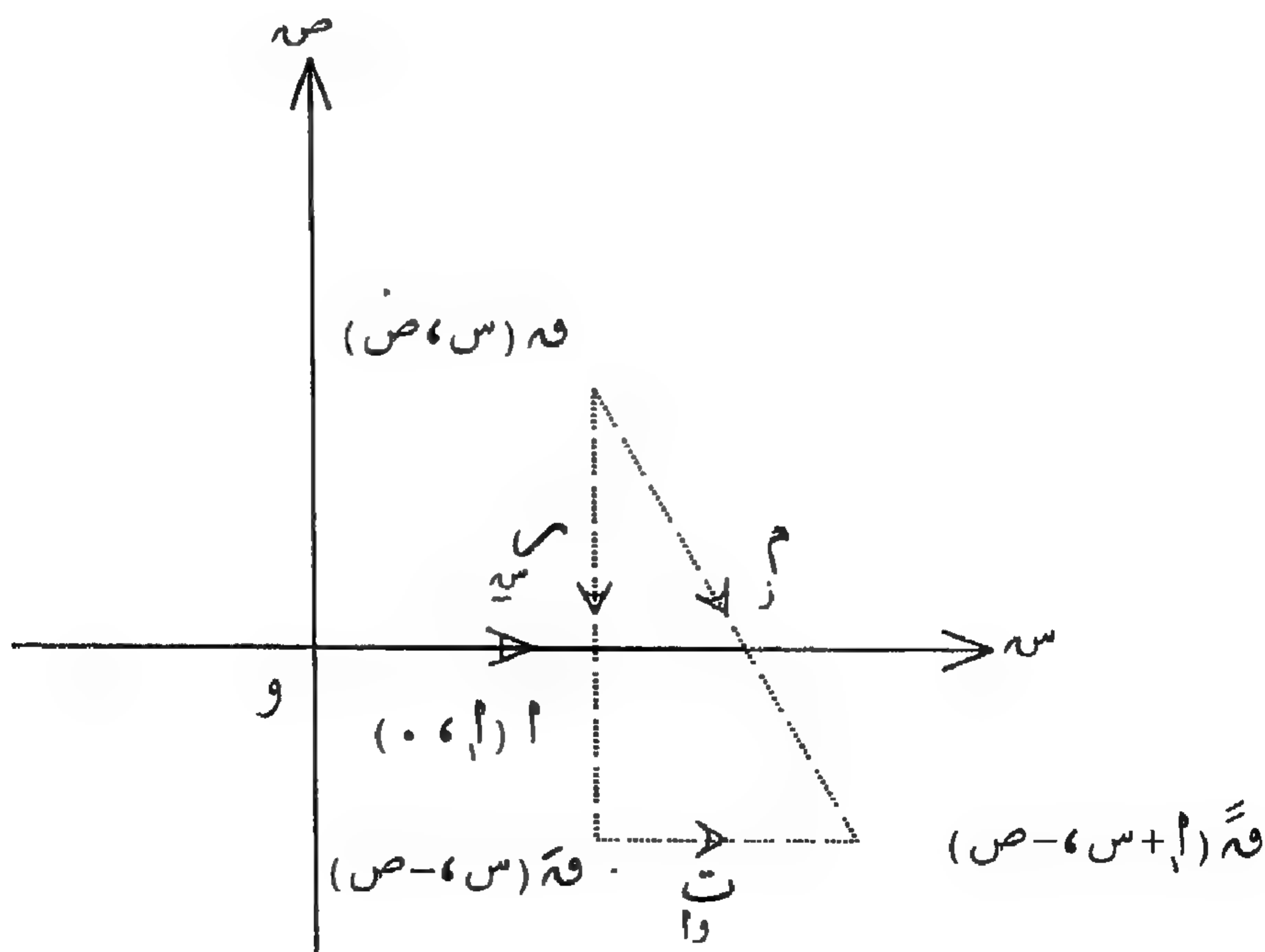
الانعكاس الانزلاقي ووحدانيه التساويات القياسيه

٥-١ : صورة النقطة بالانعكاس الانزلاقي :

تعريف : الراسم  $M$  يسمى انعكاس انزلاقي اذا وجد خط  $l$  وقطعه مستقيمه

أَب مَوَازِيهِ لِلْخَطِ لِـ بِحِثِّ أَنْ : مَز = تَابَ هـ سِرْ . الْخَطُّ لِـ يَسْمَى مَحْوَر  
الانعكاس الانزلاقي .

من الممكن ملاحظه أن : حيث أن الانتقال يكافئ تحصيل انعكاسين ، فإن الانعكاس الانزلاقي يمكن التعبير عنه كحاصل ثلاثه انعكاسات . من الممكن عندئذ استنتاج أن الانعكاسات الانزلاقيه هي تحويلات هندسيه (مستويه) وأيضاً تساويات



شکل (۵-۱)

## قياسيه مضاده .

مثال (١) : إذا كانت  $A(0, 1)$  ، و  $B(0, 0)$  نقط معطاه ، فإن

$$\text{ت} \quad (س، ص) = (س + أ، ص) \quad \text{٧} \quad (س، ص) \quad \text{ح}^2$$

$$A \text{ (س، ص)} \text{ ح}^2$$

اذن :

$$M_j(s, v) = \left( \begin{array}{c} t \\ j \end{array} \right) s^j v^{t-j} \quad (s, v)$$

ت = (س، ص) ت = (س، ص)

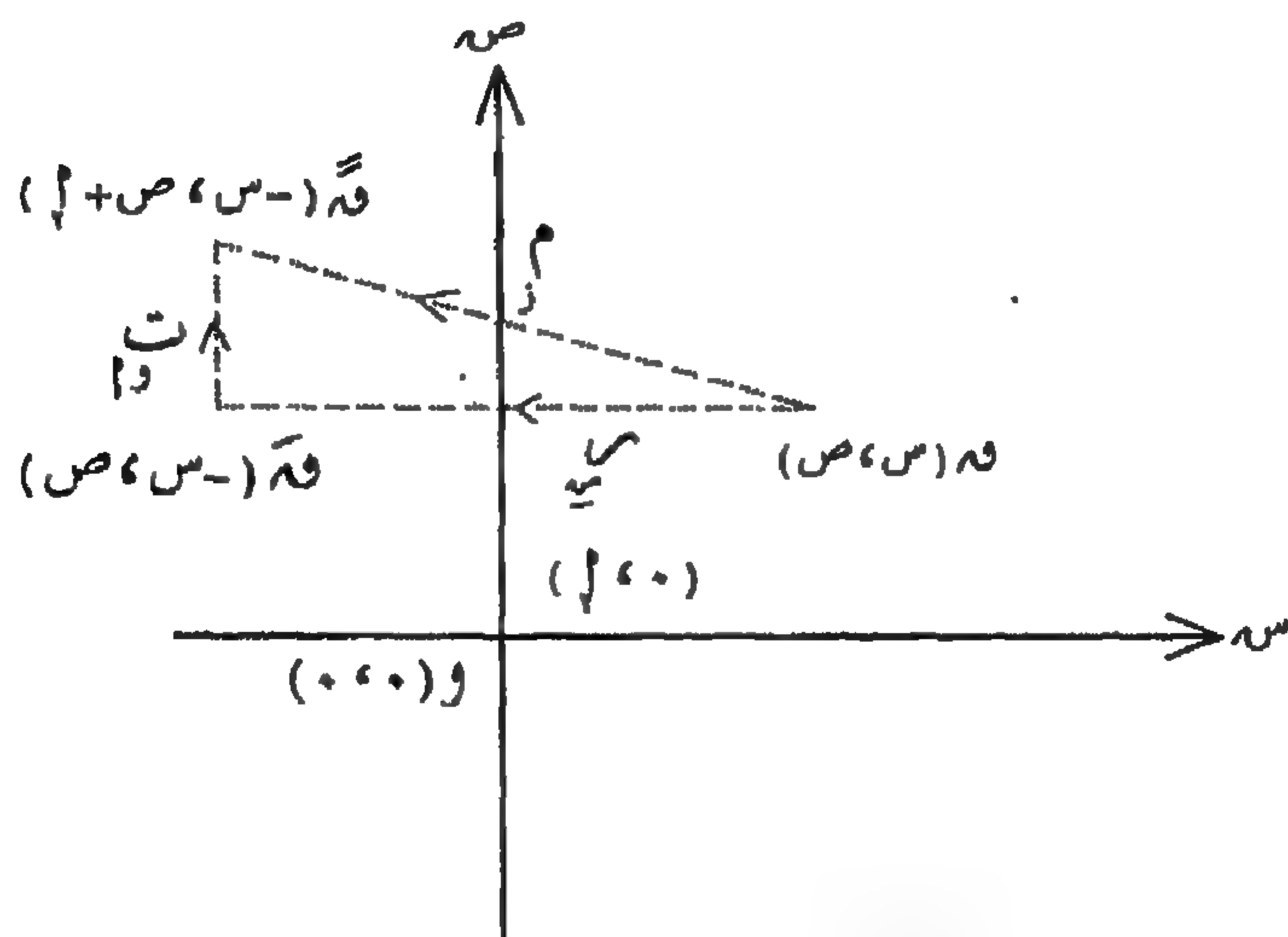
$$V \text{ (س، ص) } \exists \text{ ح}^1 \quad (= \text{س} + \text{أ}، - \text{ص})$$

انظر الشكل (٥-١) .

أما إذا كانت  $A(0, a)$  ، و  $B(0, 0)$  نقط معطاه ، فإن

$$\text{ت (س، ص)} - (\text{س، ص} + \text{أ})$$

$$m_{\text{س}}(s, v) = (-s, v)$$



**شکل (۵-۲)**

اذن :

$$م_z (س، ص) = \begin{pmatrix} ت \\ ر \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٥ \\ ٥ \end{pmatrix} (س، ص)$$

$$= \begin{pmatrix} ت \\ ر \end{pmatrix} (س، ص)$$

$$= (س، ص + أ_٢) \quad \vee (س، ص) \text{ ح}^2$$

انظر الشكل (٥-٢)

مثال (٢) : اذا كانت أ (-٢، ٦) ، ب (-٧، ١) نقط معطاه ،

$$\underline{ل} = \{ (س، ص) : ص = س \}$$

فأوجد م\_z (٤، ١) .

الحل:

$$\overleftarrow{أب} = \overleftarrow{و*}$$

$$(-٧، ١) - (-٢، ٦) = (س^*، ص^*) - (٠، ٠)$$

$$(٥، ٥) + (س^*، ص^*) = و^*$$

اذن :

$$\begin{pmatrix} ت \\ ر \end{pmatrix} (س، ص) = (س + ٥، ص + ٥)$$

$$\underline{س_١} (س، ص) = (س، ص)$$

ومن ثم يكون :

$$م_z (٤، ١) = \begin{pmatrix} ت \\ ر \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٥ \\ ٥ \end{pmatrix} (٤، ١)$$

$$= \begin{pmatrix} ت \\ ر \end{pmatrix} (س_١ (٤، ١))$$

$$= \begin{pmatrix} ت \\ ر \end{pmatrix} (٤، ١) = (٤ + ٥، ١ + ٥)$$

$$= (٩، ٦)$$



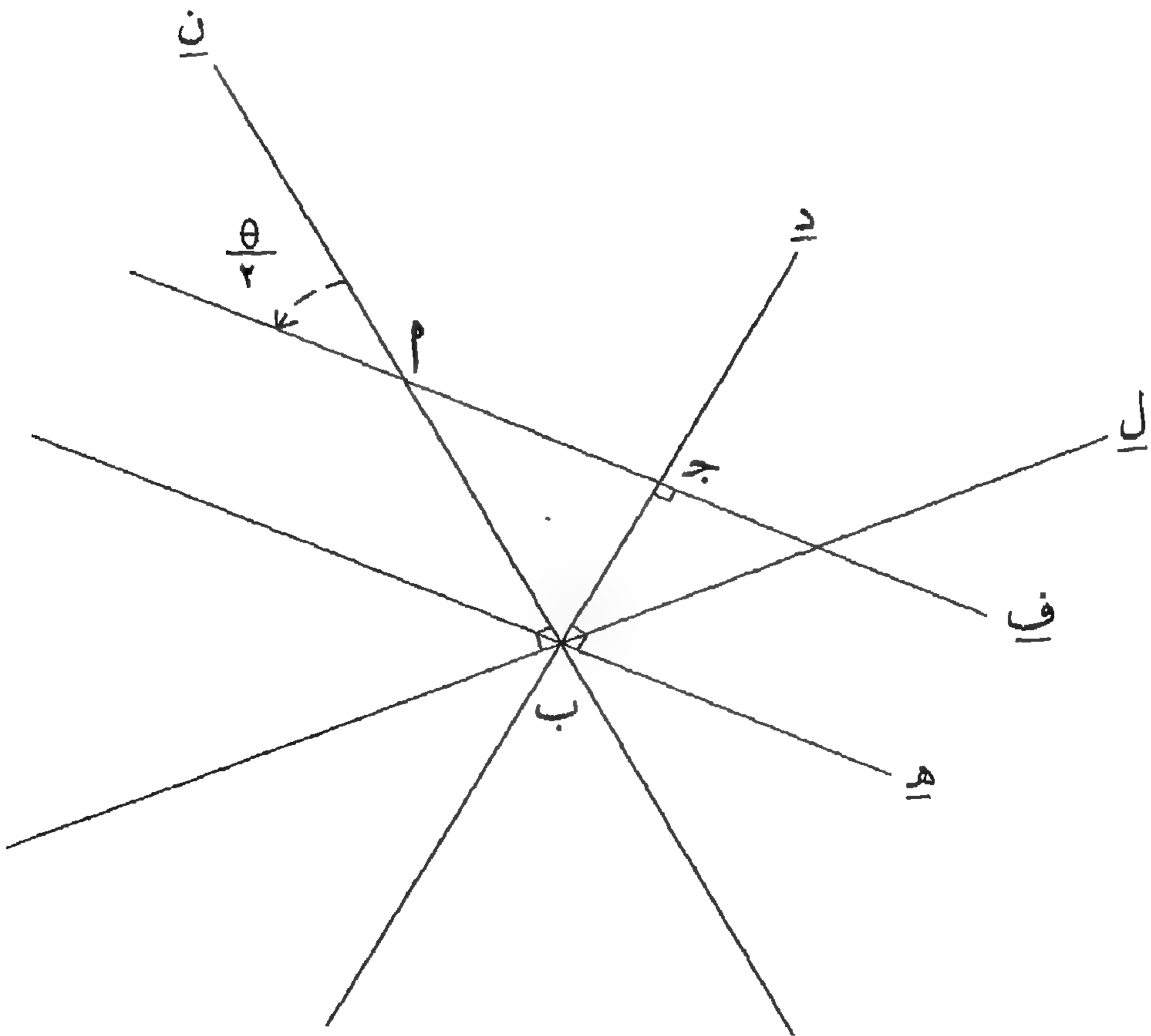
## ٥-٢: خواص الانعكاس الانزلاقي

حتى نتعرف على خواص الانعكاس الانزلاقي ، فانا سنقدم بعض المفاهيم الهامه التاليه :  
نظريه (١) : تحصيل انعكاس ودوران يكون انعكاساً انزلاقياً ، حيث مركز الدوران لا يقع على محور الانعكاس .

البرهان :

لنفرض أن  $\sigma$  ،  $\sigma_i$  هما راسمي الدوران والانعكاس على الترتيب . لنختار الخطوط  $\underline{ن}$  ،

$\underline{ف}$  بحيث أن  $\underline{ن} \perp \underline{ل}$  ومقياس الزاويه من  $\underline{ن}$  الى  $\underline{ف}$  يكون  $\frac{\theta}{2}$



شكل (٥-٣)

اذن :

$$f^0(\underline{f}^0 f) = f^0 f$$

$$= \text{سرای (سرای ۰ سرای)}$$

۰۰۰۰

حيث  $n \cap l = \{b\}$

الآن ، لنأخذ د خط مار بالنقطه ب وعمودى على ف ، ولنأخذ هـ خط مار بالنقطه ب ومواری للخط ف .

في هذه الحالة ، يكون

۱۰۰۰ = ۱۰۰۰

بالتالى :

$$0.1 \text{ م} = 0.1 \text{ م} (0.1 \text{ م})$$

$$= (0 \text{ مری } 0 \text{ مری } 0 \text{ مری})$$

بما أن هـ // ف ، فان سر ۵ سر ۶ يكون انتقال .

اذن :

مسئله ۱۰ = ۲۰ باب ۲

## حیات

د ن ف = { ج }

أَيُّ أَنْ

۵۰۱ ۵۰۲ ۵۰۳ ۵۰۴ ۵۰۵ ۵۰۶ ۵۰۷ ۵۰۸ ۵۰۹ ۵۱۰ ۵۱۱ ۵۱۲ ۵۱۳ ۵۱۴ ۵۱۵ ۵۱۶ ۵۱۷ ۵۱۸ ۵۱۹ ۵۲۰ ۵۲۱ ۵۲۲ ۵۲۳ ۵۲۴ ۵۲۵ ۵۲۶ ۵۲۷ ۵۲۸ ۵۲۹ ۵۳۰ ۵۳۱ ۵۳۲ ۵۳۳ ۵۳۴ ۵۳۵ ۵۳۶ ۵۳۷ ۵۳۸ ۵۳۹ ۵۴۰ ۵۴۱ ۵۴۲ ۵۴۳ ۵۴۴ ۵۴۵ ۵۴۶ ۵۴۷ ۵۴۸ ۵۴۹ ۵۵۰ ۵۵۱ ۵۵۲ ۵۵۳ ۵۵۴ ۵۵۵ ۵۵۶ ۵۵۷ ۵۵۸ ۵۵۹ ۵۶۰ ۵۶۱ ۵۶۲ ۵۶۳ ۵۶۴ ۵۶۵ ۵۶۶ ۵۶۷ ۵۶۸ ۵۶۹ ۵۷۰ ۵۷۱ ۵۷۲ ۵۷۳ ۵۷۴ ۵۷۵ ۵۷۶ ۵۷۷ ۵۷۸ ۵۷۹ ۵۸۰ ۵۸۱ ۵۸۲ ۵۸۳ ۵۸۴ ۵۸۵ ۵۸۶ ۵۸۷ ۵۸۸ ۵۸۹ ۵۹۰ ۵۹۱ ۵۹۲ ۵۹۳ ۵۹۴ ۵۹۵ ۵۹۶ ۵۹۷ ۵۹۸ ۵۹۹ ۶۰۰ ۶۰۱ ۶۰۲ ۶۰۳ ۶۰۴ ۶۰۵ ۶۰۶ ۶۰۷ ۶۰۸ ۶۰۹ ۶۱۰ ۶۱۱ ۶۱۲ ۶۱۳ ۶۱۴ ۶۱۵ ۶۱۶ ۶۱۷ ۶۱۸ ۶۱۹ ۶۲۰ ۶۲۱ ۶۲۲ ۶۲۳ ۶۲۴ ۶۲۵ ۶۲۶ ۶۲۷ ۶۲۸ ۶۲۹ ۶۳۰ ۶۳۱ ۶۳۲ ۶۳۳ ۶۳۴ ۶۳۵ ۶۳۶ ۶۳۷ ۶۳۸ ۶۳۹ ۶۴۰ ۶۴۱ ۶۴۲ ۶۴۳ ۶۴۴ ۶۴۵ ۶۴۶ ۶۴۷ ۶۴۸ ۶۴۹ ۶۵۰ ۶۵۱ ۶۵۲ ۶۵۳ ۶۵۴ ۶۵۵ ۶۵۶ ۶۵۷ ۶۵۸ ۶۵۹ ۶۶۰ ۶۶۱ ۶۶۲ ۶۶۳ ۶۶۴ ۶۶۵ ۶۶۶ ۶۶۷ ۶۶۸ ۶۶۹ ۶۷۰ ۶۷۱ ۶۷۲ ۶۷۳ ۶۷۴ ۶۷۵ ۶۷۶ ۶۷۷ ۶۷۸ ۶۷۹ ۶۸۰ ۶۸۱ ۶۸۲ ۶۸۳ ۶۸۴ ۶۸۵ ۶۸۶ ۶۸۷ ۶۸۸ ۶۸۹ ۶۹۰ ۶۹۱ ۶۹۲ ۶۹۳ ۶۹۴ ۶۹۵ ۶۹۶ ۶۹۷ ۶۹۸ ۶۹۹ ۷۰۰ ۷۰۱ ۷۰۲ ۷۰۳ ۷۰۴ ۷۰۵ ۷۰۶ ۷۰۷ ۷۰۸ ۷۰۹ ۷۱۰ ۷۱۱ ۷۱۲ ۷۱۳ ۷۱۴ ۷۱۵ ۷۱۶ ۷۱۷ ۷۱۸ ۷۱۹ ۷۲۰ ۷۲۱ ۷۲۲ ۷۲۳ ۷۲۴ ۷۲۵ ۷۲۶ ۷۲۷ ۷۲۸ ۷۲۹ ۷۳۰ ۷۳۱ ۷۳۲ ۷۳۳ ۷۳۴ ۷۳۵ ۷۳۶ ۷۳۷ ۷۳۸ ۷۳۹ ۷۴۰ ۷۴۱ ۷۴۲ ۷۴۳ ۷۴۴ ۷۴۵ ۷۴۶ ۷۴۷ ۷۴۸ ۷۴۹ ۷۵۰ ۷۵۱ ۷۵۲ ۷۵۳ ۷۵۴ ۷۵۵ ۷۵۶ ۷۵۷ ۷۵۸ ۷۵۹ ۷۶۰ ۷۶۱ ۷۶۲ ۷۶۳ ۷۶۴ ۷۶۵ ۷۶۶ ۷۶۷ ۷۶۸ ۷۶۹ ۷۷۰ ۷۷۱ ۷۷۲ ۷۷۳ ۷۷۴ ۷۷۵ ۷۷۶ ۷۷۷ ۷۷۸ ۷۷۹ ۷۸۰ ۷۸۱ ۷۸۲ ۷۸۳ ۷۸۴ ۷۸۵ ۷۸۶ ۷۸۷ ۷۸۸ ۷۸۹ ۷۹۰ ۷۹۱ ۷۹۲ ۷۹۳ ۷۹۴ ۷۹۵ ۷۹۶ ۷۹۷ ۷۹۸ ۷۹۹ ۸۰۰ ۸۰۱ ۸۰۲ ۸۰۳ ۸۰۴ ۸۰۵ ۸۰۶ ۸۰۷ ۸۰۸ ۸۰۹ ۸۱۰ ۸۱۱ ۸۱۲ ۸۱۳ ۸۱۴ ۸۱۵ ۸۱۶ ۸۱۷ ۸۱۸ ۸۱۹ ۸۲۰ ۸۲۱ ۸۲۲ ۸۲۳ ۸۲۴ ۸۲۵ ۸۲۶ ۸۲۷ ۸۲۸ ۸۲۹ ۸۳۰ ۸۳۱ ۸۳۲ ۸۳۳ ۸۳۴ ۸۳۵ ۸۳۶ ۸۳۷ ۸۳۸ ۸۳۹ ۸۴۰ ۸۴۱ ۸۴۲ ۸۴۳ ۸۴۴ ۸۴۵ ۸۴۶ ۸۴۷ ۸۴۸ ۸۴۹ ۸۵۰ ۸۵۱ ۸۵۲ ۸۵۳ ۸۵۴ ۸۵۵ ۸۵۶ ۸۵۷ ۸۵۸ ۸۵۹ ۸۶۰ ۸۶۱ ۸۶۲ ۸۶۳ ۸۶۴ ۸۶۵ ۸۶۶ ۸۶۷ ۸۶۸ ۸۶۹ ۸۷۰ ۸۷۱ ۸۷۲ ۸۷۳ ۸۷۴ ۸۷۵ ۸۷۶ ۸۷۷ ۸۷۸ ۸۷۹ ۸۸۰ ۸۸۱ ۸۸۲ ۸۸۳ ۸۸۴ ۸۸۵ ۸۸۶ ۸۸۷ ۸۸۸ ۸۸۹ ۸۹۰ ۸۹۱ ۸۹۲ ۸۹۳ ۸۹۴ ۸۹۵ ۸۹۶ ۸۹۷ ۸۹۸ ۸۹۹ ۹۰۰ ۹۰۱ ۹۰۲ ۹۰۳ ۹۰۴ ۹۰۵ ۹۰۶ ۹۰۷ ۹۰۸ ۹۰۹ ۹۱۰ ۹۱۱ ۹۱۲ ۹۱۳ ۹۱۴ ۹۱۵ ۹۱۶ ۹۱۷ ۹۱۸ ۹۱۹ ۹۲۰ ۹۲۱ ۹۲۲ ۹۲۳ ۹۲۴ ۹۲۵ ۹۲۶ ۹۲۷ ۹۲۸ ۹۲۹ ۹۳۰ ۹۳۱ ۹۳۲ ۹۳۳ ۹۳۴ ۹۳۵ ۹۳۶ ۹۳۷ ۹۳۸ ۹۳۹ ۹۴۰ ۹۴۱ ۹۴۲ ۹۴۳ ۹۴۴ ۹۴۵ ۹۴۶ ۹۴۷ ۹۴۸ ۹۴۹ ۹۵۰ ۹۵۱ ۹۵۲ ۹۵۳ ۹۵۴ ۹۵۵ ۹۵۶ ۹۵۷ ۹۵۸ ۹۵۹ ۹۶۰ ۹۶۱ ۹۶۲ ۹۶۳ ۹۶۴ ۹۶۵ ۹۶۶ ۹۶۷ ۹۶۸ ۹۶۹ ۹۷۰ ۹۷۱ ۹۷۲ ۹۷۳ ۹۷۴ ۹۷۵ ۹۷۶ ۹۷۷ ۹۷۸ ۹۷۹ ۹۸۰ ۹۸۱ ۹۸۲ ۹۸۳ ۹۸۴ ۹۸۵ ۹۸۶ ۹۸۷ ۹۸۸ ۹۸۹ ۹۹۰ ۹۹۱ ۹۹۲ ۹۹۳ ۹۹۴ ۹۹۵ ۹۹۶ ۹۹۷ ۹۹۸ ۹۹۹ ۱۰۰۰ ۱۰۰۱ ۱۰۰۲ ۱۰۰۳ ۱۰۰۴ ۱۰۰۵ ۱۰۰۶ ۱۰۰۷ ۱۰۰۸ ۱۰۰۹ ۱۰۱۰ ۱۰۱۱ ۱۰۱۲ ۱۰۱۳ ۱۰۱۴ ۱۰۱۵ ۱۰۱۶ ۱۰۱۷ ۱۰۱۸ ۱۰۱۹ ۱۰۲۰ ۱۰۲۱ ۱۰۲۲ ۱۰۲۳ ۱۰۲۴ ۱۰۲۵ ۱۰۲۶ ۱۰۲۷ ۱۰۲۸ ۱۰۲۹ ۱۰۳۰ ۱۰۳۱ ۱۰۳۲ ۱۰۳۳ ۱۰۳۴ ۱۰۳۵ ۱۰۳۶ ۱۰۳۷ ۱۰۳۸ ۱۰۳۹ ۱۰۴۰ ۱۰۴۱ ۱۰۴۲ ۱۰۴۳ ۱۰۴۴ ۱۰۴۵ ۱۰۴۶ ۱۰۴۷ ۱۰۴۸ ۱۰۴۹ ۱۰۵۰ ۱۰۵۱ ۱۰۵۲ ۱۰۵۳ ۱۰۵۴ ۱۰۵۵ ۱۰۵۶ ۱۰۵۷ ۱۰۵۸ ۱۰۵۹ ۱۰۶۰ ۱۰۶۱ ۱۰۶۲ ۱۰۶۳ ۱۰۶۴ ۱۰۶۵ ۱۰۶

ملاحظہ (۱) : اذا كانت  $\alpha$  د ل ، فان  $\alpha$  د  $\alpha$   $\alpha$  يكون انعكاساً

لتوضيح ذلك ، نأخذ الخط ن ماراً بالنقطة أ بحيث أن مقياس الزاوية من ل الى ن يكون  $\frac{0}{2}$

اذن:  $\psi^0(\psi^0) = \psi^0$

$$I_{\mu\nu} = I_0 \quad I_{\mu\nu} = (J_{\mu}^0 \quad J_{\nu}^0) \quad I_{\mu\nu} =$$

نتیجہ (۱) : اذا كانت أب قطعه مستقيمه غير عمودية على خط معطى ل ، فان تحصيل انتقال ت وانعكاس س يكون انعكاساً انزلاقياً .

نتیجہ (۲) : اِذَا کان لِ، نِ، هـ خطوط غیر متقاطعہ فی نقطہ واحدہ بحیث اُن نِ لایوازی لِ، هـ لایوازی لِ؛ فان سِ، سِ، سِ یكون انعکاسا انزلاقیا .

\* علينا ملاحظه أنه اذا كان من انعكاس انزلاقي ،  $ق' = م(ق)$  لأى نقطه  $ق$  ، فان محور الانعكاس الانزلاقي يحتوى على نقطه المنتصف للقطعه المستقيمه  $ق ق'$  .

بناءً على ذلك ، إذا كانت **ق'** ، **ك'** صورته للنقط **ق** ، **ك** ؛ فإن الخط المار بمختصات **ق ق'** ، **ك ك'** يكون هو محور الانعكاس الانزلاقي .

وعلى سبيل المثال ، لنأخذ الراسم  $\text{س} \circ \text{س} \circ \text{س}$  (شكل ٥-٤) .

من السهل تعيين موضع كل من أ ، جـ تحت تأثير  $\text{س} \text{ } \text{س} \text{ } \text{س} \text{ } \text{س}$

إذا كان ف هو الخط المار بالنقط س ، ص حيث س منتصف أ أ' ، ص منتصف

ح ح' ، فانه ينتج أن ف هو محور الانعكاس الانزلاقي ، ويكون



سای ۰ ساین ۰ = ت ۰ ساف

حيث  $\vec{d} = \vec{c}^*$  ،  $\vec{c} = \vec{c}^*$  (جـ) .

وفيما يلي نَحمل خواص الانعكاس الانزلاقي :

- ١- الانعكاس الانزلاقي تحويلة هندسيه (مستويه) .
- ٢- الانعكاس الانزلاقي تساوي قياسي .
- ٣- الانعكاس الانزلاقي يحفظ مقياس الزوايا .
- ٤- الانعكاس الانزلاقي يحفظ استقامة النقط والبينيه والتوازي .
- ٥- الانعكاس الانزلاقي تحويلة مضادة .
- ٦- الانعكاس الانزلاقي ليس له نقطه ثابتة .

### ٥-٣ وحدانيه التساويات القياسيه

دعنا نرى ماذا يحدث لو أننا حصلنا انعكاس انزلاقي مع انتقال . ليكن  $M$  انعكاس انزلاقي

محوره  $L$  بحيث أن  $M = T_{\vec{AB}} \circ S_{\vec{L}}$  ، وليكن  $T$  أى انتقال .  
اذن :

$$T \circ M = T \circ (T_{\vec{AB}} \circ S_{\vec{L}})$$

$$= (T \circ T_{\vec{AB}}) \circ S_{\vec{L}}$$

ولكن نحصيل إنتقالين هو إنتقال ( الانتقال يحقق خاصيه الانغلاق ) .  
أى أن :

$$T \circ T_{\vec{AB}} = T_{\vec{AH}}$$

بالتالى :

$$T \circ M = T_{\vec{AH}} \circ S_{\vec{L}}$$

إذا كان  $H \perp L$  ، فإن  $T_{\vec{AH}} \circ S_{\vec{L}}$  يكون انعكاساً محوره موازياً للنقط  $L$  .

←  
وإذا كان هـ ف ل ، فان ت هـ سرى يكون انعكاساً انزلاقياً (باستخدام نتیجه (۱)

لذلك فان ت هـ م ز يكون انعكاساً أو انعكاساً انزلاقياً

(نفس النتيجة تتحقق بالنسبة الى م ز هـ ت ) .

مما سبق نستخلص أن : تحصيل انعكاس انزلاقى وانتقال إما أن يكون انعكاساً أو إنعكاساً انزلاقياً .

ولندرس الآن تحصيل انعكاس انزلاقى وانعكاس .

ليكن

$$م ز = ت هـ سرى ؛ سرى انعكاس محور ن .$$

اذن:

$$سرى هـ م ز = سرى هـ ( ت هـ سرى )$$

$$= سرى هـ ( سرى هـ ت هـ )$$

$$= ( سرى هـ سرى ) هـ ت هـ$$

إذا كان ن // ل ، فان سرى هـ سرى هو انتقال ، وبالتالي يكون سرى هـ م ز انتقالاً .

وإذا كان ن لا يوازي ل ، فان سرى هـ سرى هو دوران . لكن تحصيل دوران وانتقال هو

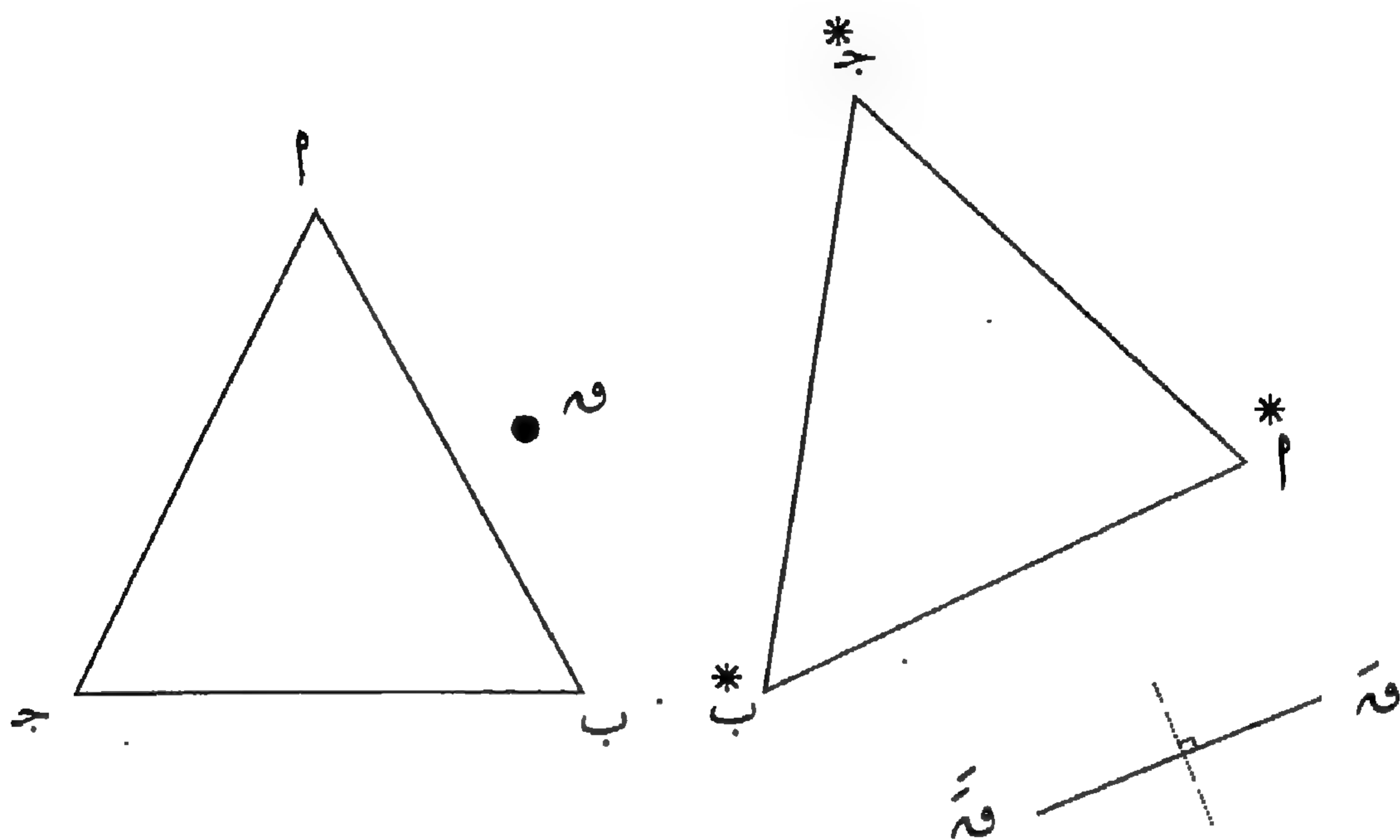
دوران ( لماذا ؟ ) .

من هذا ينتج أن سرى هـ م ز دوران .

مره أخرى ، النتيجة تتحقق بالنسبة الى م ز هـ سرى .

وبصفة عامة نقول أن : تحصيل انعكاس انزلاقى وانعكاس إما أن يكون انتقالاً أو دوراناً .

نظریہ (۲) : لتکن ا، ب، ج — ثلاث نقط غیر واقعہ علی استقامہ ؛ ا\*، ب\*، ج\* — ثلاث نقط آخری . اذن یوجد علی الاکثر تساوی قیاسی واحد یرسل ا فوق ا\*، ب فوق ب\*، ج — فوق ج\* .



شکل (۵-۵)

**البرهان :**

نفرض أن ت<sub>1</sub>، ت<sub>2</sub> تساویات قیاسیه بحیث أن :

$$(f)_T = *f = (f)_1$$

$$t_1(b) = b^* = t_2(b)$$

$$t_1(j) = j^* = t_2(j)$$

المطلوب اثبات أن :

. j v .

$$ت_1(ق) = ت_2(ق)$$

بما أن  $T_1$ ،  $T_2$  تساويات قياسية، فإن

$$\overline{أ ب} = \overline{أ*ب*} ، \overline{أ ج} = \overline{أ*ج*} ، \overline{ب ج} = \overline{ب*ج*} .$$

بما أن أ ، ب ، جـ نقط غير واقعه على استقامه واحده ؛ فان أ\* ، ب\* ، ج\* نقط غير واقعه على استقامه واحده (لماذا؟) .

لنفرض أن  $ت_١(ق) \neq ت_٢(ق)$  .

اذن ، اذا كانت  $ق'_١ = ت_١(ق)$  ،  $ق''_٢ = ت_٢(ق)$  ؛ فان  $\overline{ق'_١} = \overline{ق''_٢} = \overline{ق'_١} = \overline{ق''_٢}$  لان  $ت_١$  ،  $ت_٢$  تساويات قياسيه .

لكن المنتصف العمودى للقطعه المستقيمه هو مجموعه كل النقط التى تبعد عن طرفى القطعه المستقيمه بأبعاد متساويه .

وعليه ، فان أ\* تقع على المنتصف العمودى للقطعه المستقيمه  $\overline{ق'_١ ق''_٢}$  . وب نفس الطريقه نجد أن النقط ب\* ، ج\* تقع على المنتصف العمودى للقطعه المستقيمه  $\overline{ق'_١ ق''_٢}$  .

ولكن هذا يعارض حقيقه أن النقط أ\* ، ب\* ، ج\* غير واقعه على استقامه واحده . من هذا التعارض نستنتج أن :

$$ت_١(ق) = ت_٢(ق) ، \text{ أى أن } ت_١ = ت_٢ .$$

نظريه (٣) : اذا كان ل خط مار بنقطه الأصل ؛ واذا كان

$$س_١(١،٠) = (أ،ب) ، \text{ فان}$$

$$س_١(ق) = (أس + ب ص ، ب س - أ ص) .$$

البرهان :

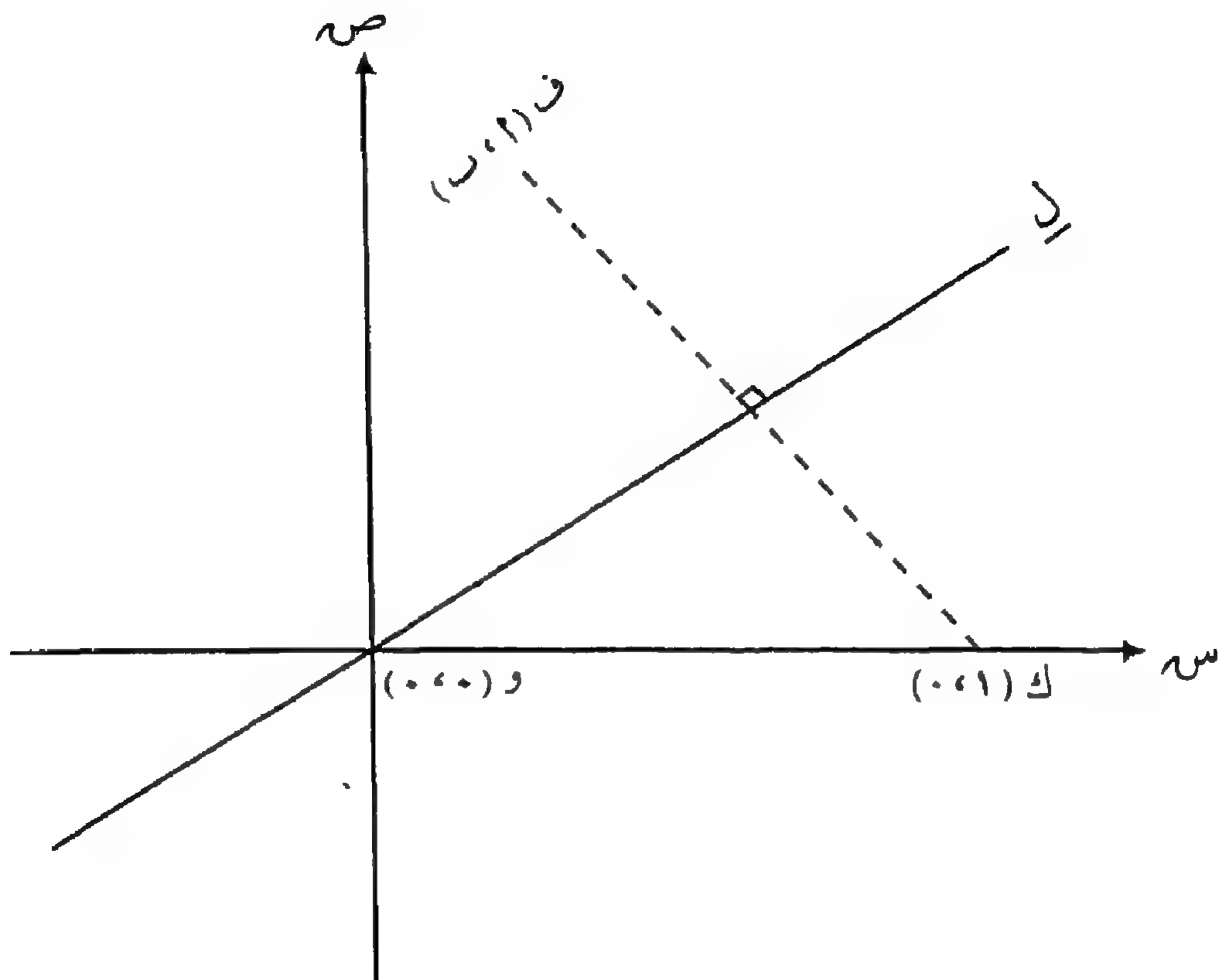
نفرض أن



$$ت(ق) = (أس + ب ص ، ب س - أ ص)$$

ثم ثبت أن  $ت = س$

(باستخدام نظرية (٢) ) .



شكل (٥-٦)

أولاً ، سنثبت أن  $ت$  تساوي قياساً وذلك باخذ  $ق_١(س_١، ص_١)$  ،  $ق_٢(س_٢، ص_٢)$  أى نقطتين .  
اذن :

$$ق_١^* ت = ت(ق_١)$$

$$= (أس_١ + ب ص_١ ، ب س_١ - أ ص_١) ؛$$

$$ق_٢^* ت = ت(ق_٢)$$

$$= (أ_2 + ب_2 ص_2 ، ب_2 س_2 - أ_2 ص_2) .$$

باستخدام قانون البعد نجد أن :

$$\overline{(\overline{ق_1^* ق_2^*})} = \overline{[(أ_1 س_1 + ب_1 ص_1) - (أ_2 س_2 + ب_2 ص_2)]} + \overline{[(ب_1 س_1 - أ_1 ص_1) - (ب_2 س_2 - أ_2 ص_2)]}$$

$$= \overline{[(أ_1 س_1 - أ_2 س_2) + (ب_1 ص_1 - ب_2 ص_2)]} + \overline{[(ب_1 س_1 - أ_1 ص_1) - (ب_2 س_2 - أ_2 ص_2)]}$$

$$= \overline{(أ_1 + ب_1)(س_1 - ص_1)} + \overline{(أ_2 + ب_2)(س_2 - ص_2)}$$

لكن

$$ف = س_1 (ك) ، س_1 (و) = و ، وف = وف ، وف = وف$$

وحيث أن

$$\overline{وك} = ١ ، وف = \sqrt{١ + ب_1^2}$$

فان

$$١ = ب_1^2 + أ_1^2$$

بالتالى فان

$$\overline{ق_1^* ق_2^*} = \overline{[(١)(س_1 - ص_1) + (١)(س_2 - ص_2)]} = \overline{ق_1^* ق_2^*}$$

أى أن ت تساوى قياسى .

الآن :

$$ت (و) = (٠، ٠)$$

$$ت (ك) = (أ، ب)$$

$$ت (ف) = (أ.أ + ب.ب ، ب.أ - أ.ب)$$

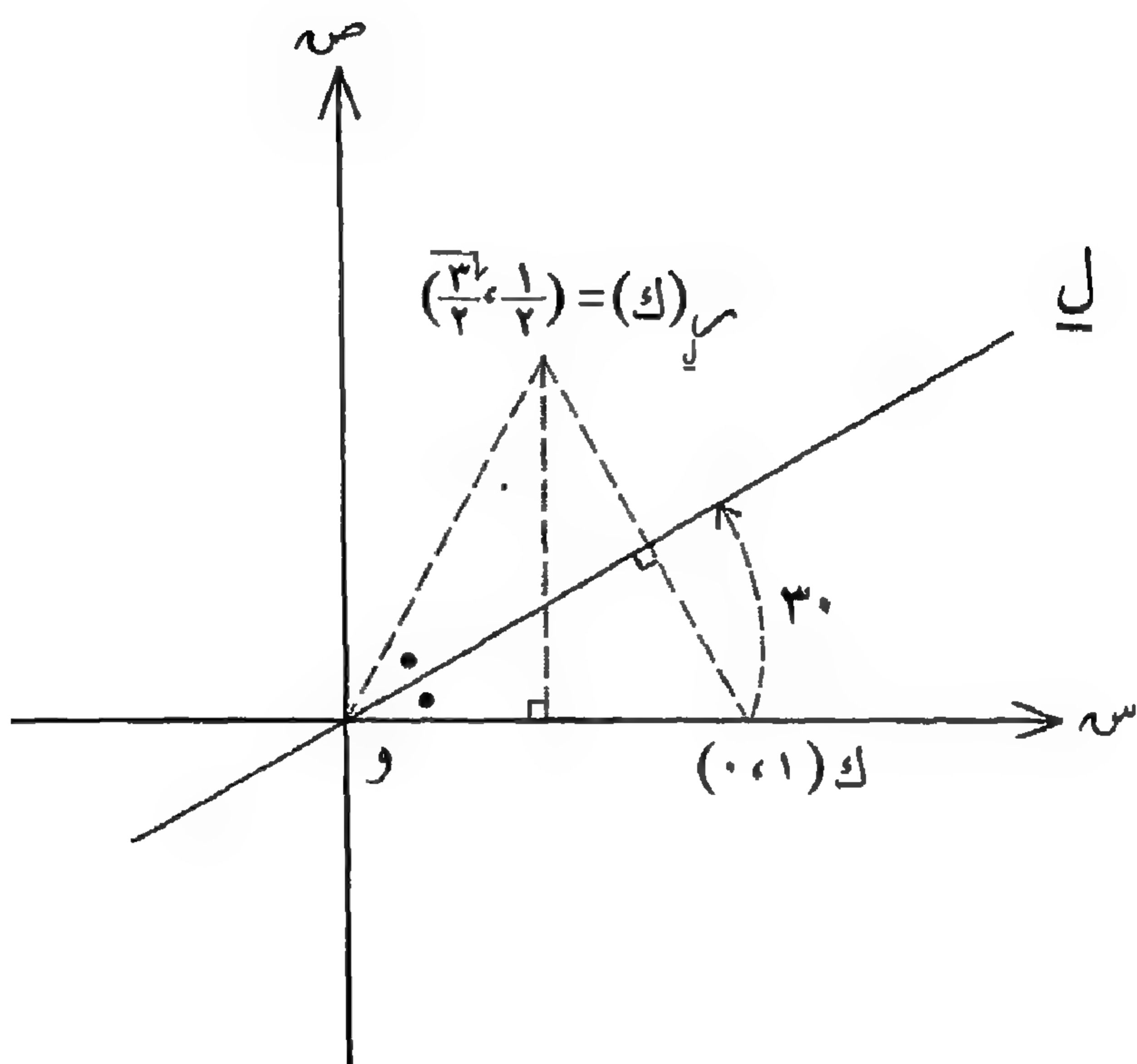
$$= (أ + ب^2 ، .) = (٠، ١)$$

بما أن و د ل ، س\_1 (و) = و ، وبما أن س\_1 (ك) = ف ، س\_1 (ف) = ك ؛ فان كل

من  $\mathbb{R}^n$  ، ترواسم تساوی قیاسی ترسل النقط و ، ک ، ف التي لاتقع على استقامه واحده فوق  
و ، ف ، ک على الترتيب . ومن نظريه (٢) نستنتج ان  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$  .

مثال (٣) : اذا كانت و نقطه الأصل ، ق (س،ص) أى نقطه ، فأوجد صورته النقطه ق تحت

تأثير التراسم  $\mathbb{R}^n$



شكل (٥-٧)

الحل

لنفرض أن ل خطا مارا بالنقطه و بحيث أن مقياس الزوايه من المحور السيني الى ل هي ٣٠ . من شكل (٥-٧) يتضح لنا :

$$\underline{س} = (١, ٠) = \left( \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

بالتالى :

$$\underline{س} = (ق) = \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}ص, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}س \right)$$

لكن ، اذا كان م هو المحور السيني ، فان

$$\underline{س} = (ق) = (٠, ١) = (٠, ١)$$

$$= \underline{س} (س, ق)$$

$$= \underline{س} (س, -ص)$$

$$= \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}ص, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}س \right)$$

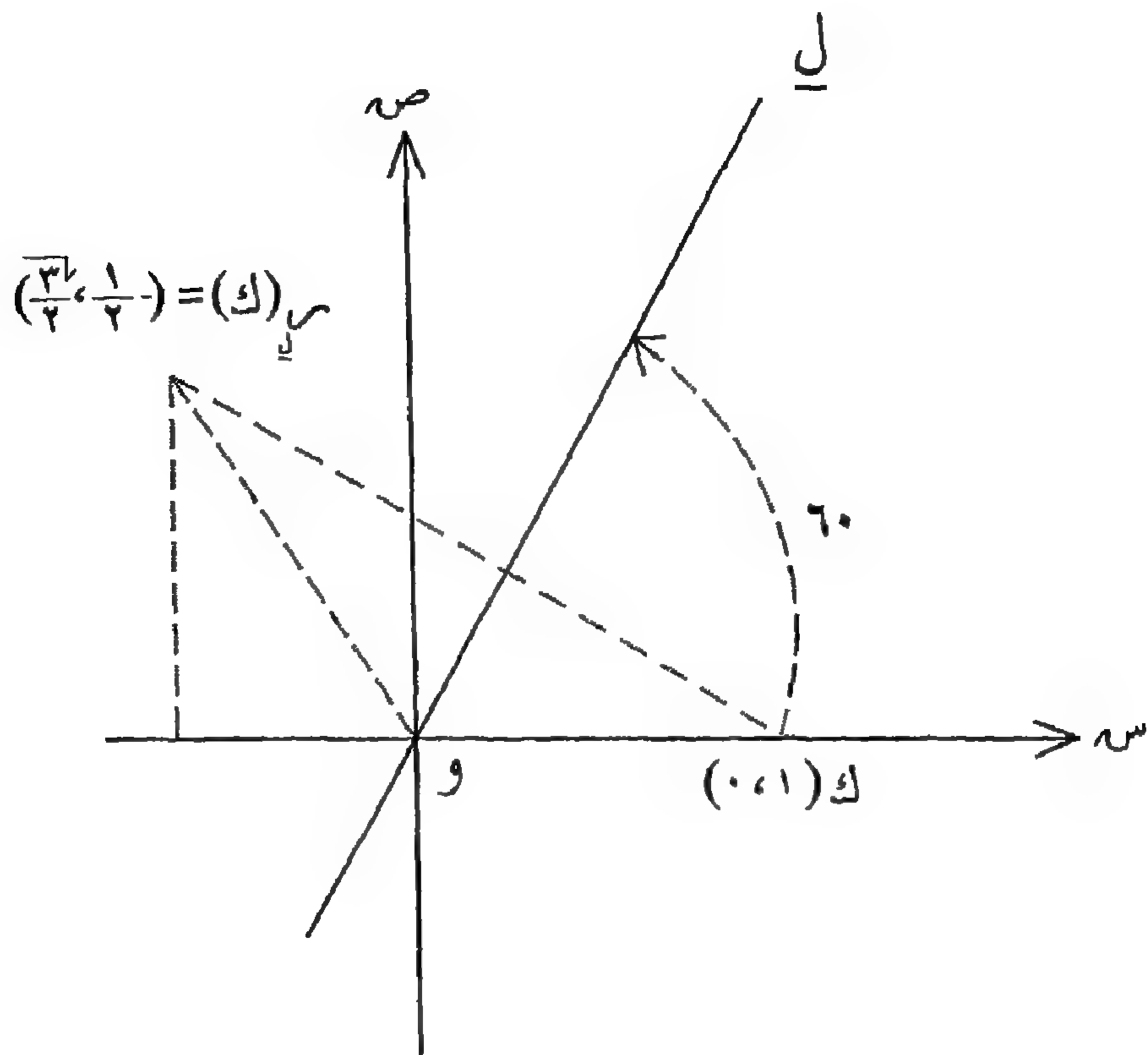
\* ملاحظه (٢) : اذا كان س راسم دوران حول نقطه الأصل ، يرسل  $\theta, \phi$

النقطه ك (١, ٠) فوق النقطه ف (أ ، ب) ؛ فان

$$\underline{س} = (ق) = (س - ب, ب + أ) = (س, ق) \quad \theta, \phi$$

مثال (٤) : أوجد صورته النقطه (٢،١) تحت تأثير الراسم من حيث و = (٠،٠) .  
١٢٠٠

الحل :



شكل (٥-٨)

لنفرض أن ل خطاً ماراً بنقطه الأصل وبحيث أن مقياس الزاويه من المحور السيني الى ل هو ٦٠ . من شكل (٥-٨) يتضح لنا :

$$س_{(0,1)} = \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right) = ك'$$

بالتالى :

$$س_{(ق)} = ( - \frac{1}{2}س + \frac{\sqrt{2}}{2}ص , \frac{1}{2}س + \frac{\sqrt{2}}{2}ص )$$

(وهذه هى نفس النتيجة التى حصلنا عليها فى مثال (١٧) بالباب الثانى).

بالتالى :

$$س_{(ق)} = س_{(ج)} \circ س_{(س)}$$

اذن

$$س_{(ق)} = س_{(ج)} \circ س_{(س)} = س_{(س)}(س، ص)$$

$$= س_{(س،-ص)}$$

$$= ( - \frac{1}{2}س + \frac{\sqrt{2}}{2}ص , \frac{1}{2}س - \frac{\sqrt{2}}{2}ص )$$

وبالتالى :

$$س_{(ق)} = ( - \frac{1}{2}س + \frac{\sqrt{2}}{2}ص , \frac{1}{2}س - \frac{\sqrt{2}}{2}ص ) = ( \frac{1}{2}س - \frac{\sqrt{2}}{2}ص , \frac{1}{2}س + \frac{\sqrt{2}}{2}ص ) = (٢، ١)$$

$$= ( -٢٣، ٢، ٧٣، ٠ )$$

نظريه (٤) : اذا كانت أ ب ، جـ د قطع مستقيمه متطابقه ، فانه يوجد إنسان من التساويات القياسيه يرسلان أ فوق جـ ، ب فوق د أحدهما مباشر والآخر مضاد .

البرهان :

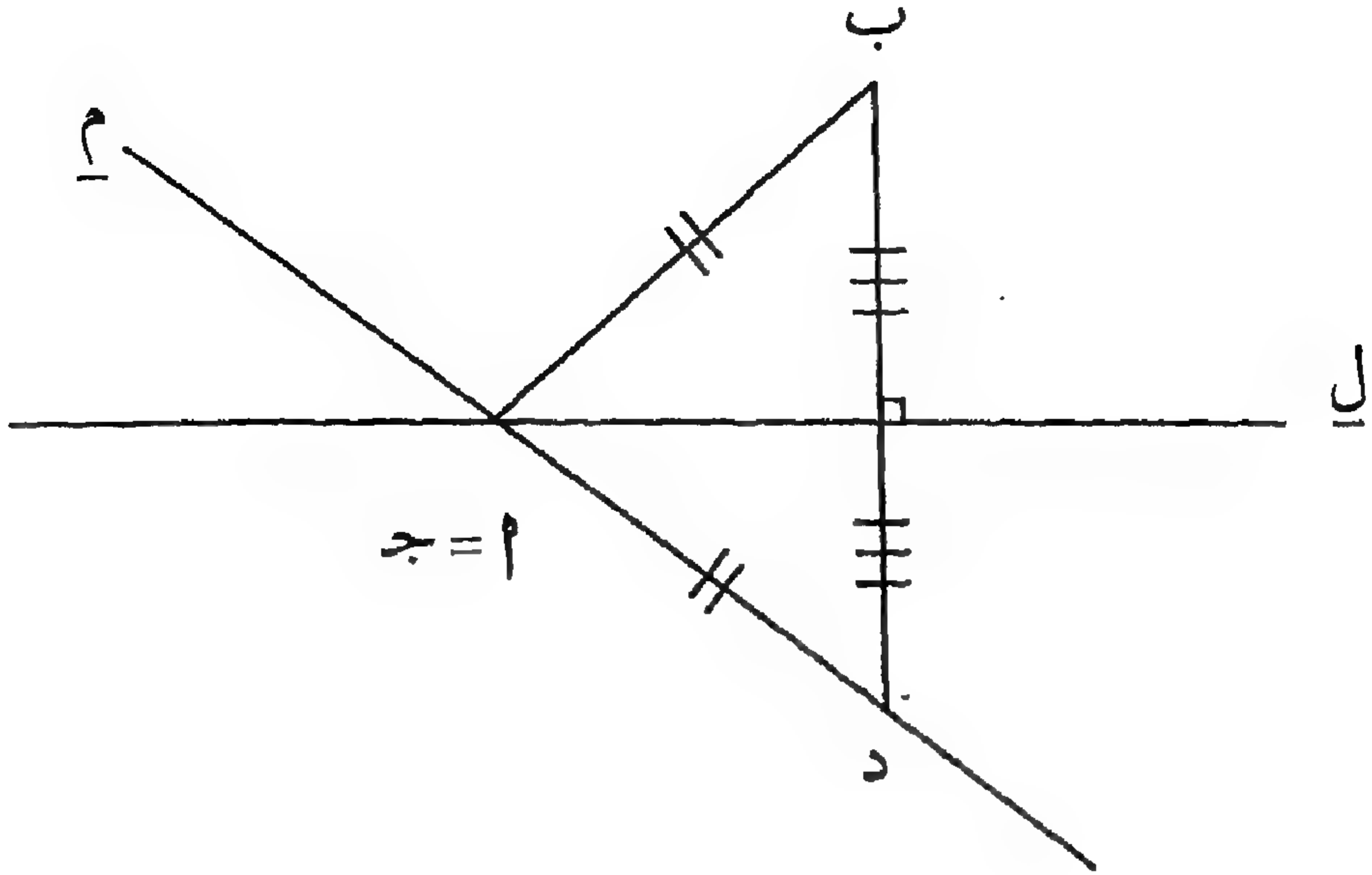
برهان هذه النظريه يتطلب منا دراسه الاحتمالات التاليه :

$$١- أ = جـ ، ب \neq د$$

$$٣- أ \neq جـ ، ب \neq د$$

$$٣- أ = جـ ، ب = د$$

(لاحظ أن الاحتمال  $أ \neq ج$  ،  $ب = د$  هو نفسه الاحتمال الأول ) .



شكل (٥-٩)

أولاً : لنفرض أن  $أ = ج$  ،  $ب$  يـمـدـه ليـكـن  $ل$  هو النصف العمودي للقطعة المستقيمة  $ب د$  .

بما أن  $أ = ج$  ،  $أ ب = ب ج$  ، فإن  $أ ب = أ د$  ومن ثم يكون  $أ د$   $ل$  .

(أى نقطه تبعد عن طرفي قطعه مستقيمه بمسافه متساويه ، تقع على النصف العمودي لهذه القطعه المستقيمه ) .

ذن :

$\text{سري (أ)} = \text{أ} = \text{جـ} , \text{سري (ب)} = \text{د} ,$   
وللحصول على التساوى القياسى الثانى ، فاننا نأخذ  $\text{م} = \text{جـ} = \text{د} .$

أذن :

$(\text{سري م}) \text{ (أ)} = \text{أ} = \text{سري م (سري (أ))} = \text{سري (جـ)} = \text{جـ} ,$   
 $(\text{سري م}) \text{ (ب)} = \text{ب} = \text{سري م (سري (ب))} = \text{سري (د)} = \text{د}$

من هذا يتضح أن  $\text{سري م}$  هو التساوى القياسى المضاد بينما  $\text{سري م} = 0$  هو التساوى القياسى المباشر .

ثانيا : لنفرض أن  $\text{أ} \neq \text{جـ} , \text{ب} \neq \text{د} .$  لنأخذ  $\text{ل}$  هو المنصف العمودى للقطعه المستقيمه  $\text{أجـ} .$

واضح أن :

$\text{سري (أ)} = \text{جـ}$  اذا أخذنا  $\text{ب} = \text{سري (ب)}$  فاننا نلاحظ وجود احتمالين : إما  $\text{ب} = \text{د}$  (أسفل شكل (٥-١٠)) أو  $\text{ب} \neq \text{د}$  (أعلى شكل (٥-١٠)) .

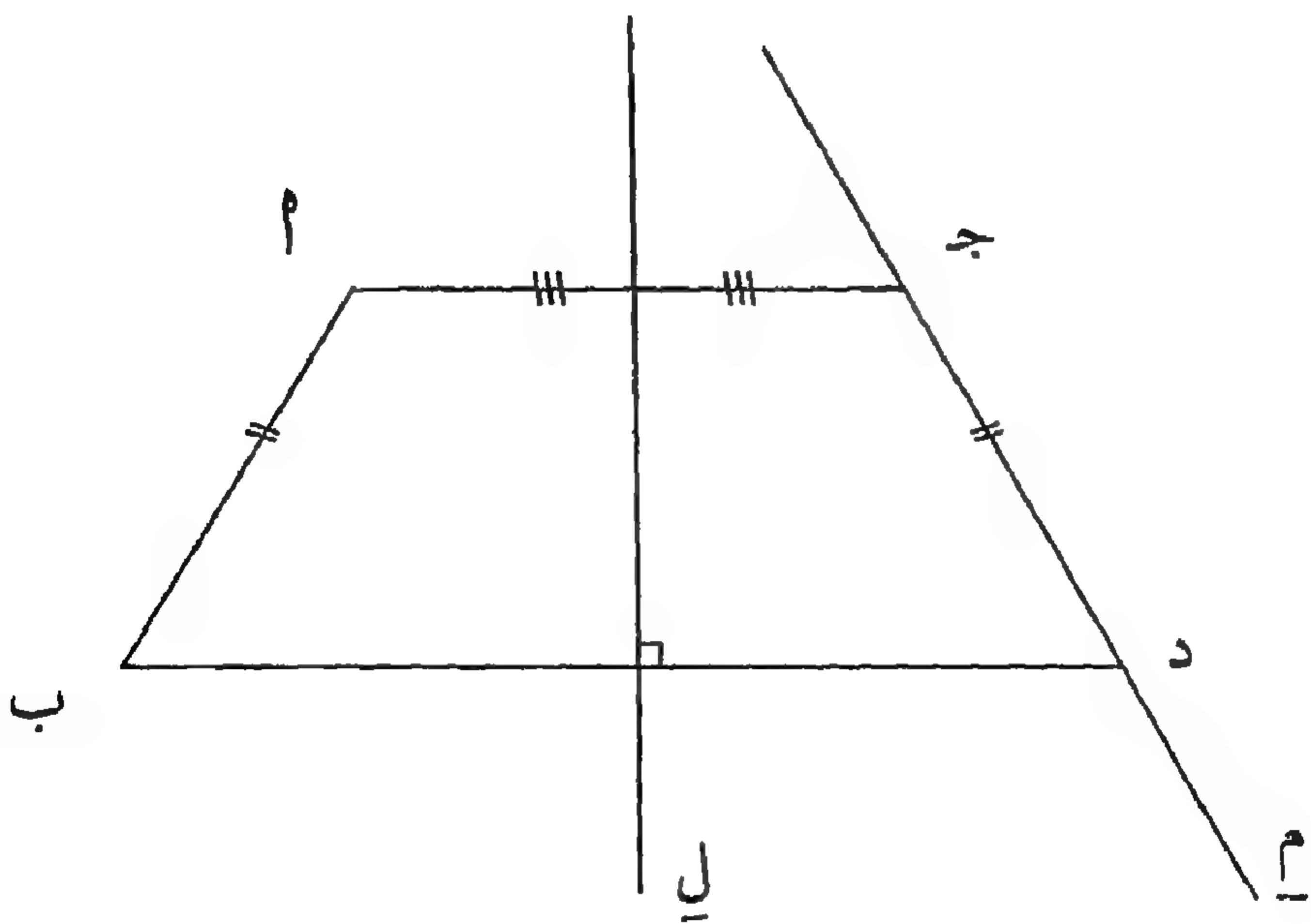
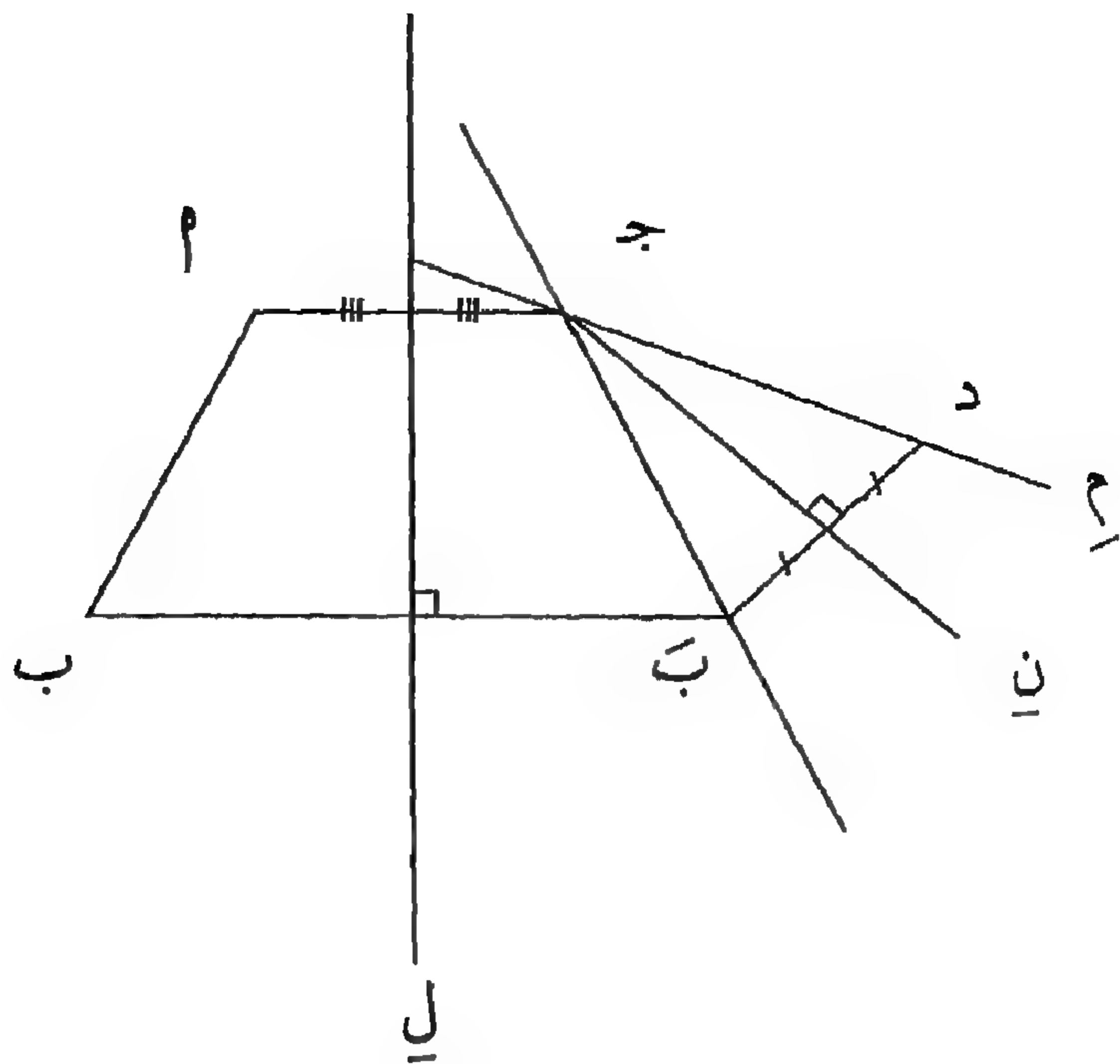
اذا كانت  $\text{ب} = \text{د} ,$  فان  $\text{سري م}$  هو التساوى القياسى المضاد  
الآن ، نفرض أن  $\text{م} = \text{جـ} = \text{د} .$  بالتالى فان  $\text{سري م} = 0$  هو التساوى القياسى المباشر .

على الجانب الآخر ، اذا كانت  $\text{ب} \neq \text{د} ,$  فاننا نأخذ  $\text{ن}$  كمنصف عمودى للقطعه المستقيمه

$\text{ب د} .$  نحن نعلم أن  $\text{جـ} = \text{د} = \text{ن}$  لأن  $\text{جـ} = \text{د} = \text{أ} = \text{ب} = \text{ج ب} .$

اذن  $\text{سري (جـ)} = \text{جـ} , \text{سري (ب)} = \text{د}$





شکل (۱۰-۵)

بالتالى ، فان  $\text{سري} \circ \text{سري}$  هو التساوى القياسى المباشر .  
 أخيراً ، لنأخذ مره أخرى  $\text{م} = \text{جـ د}$  . نلاحظ أن  
 $(\text{سري} \circ \text{سري} \circ \text{سري}) (\text{أ}) = \text{جـ}$  ،

$$(\text{سري} \circ \text{سري} \circ \text{سري}) (\text{ب}) = \text{د}$$

من هذا نستنتج أن  $(\text{سري} \circ \text{سري} \circ \text{سري})$  هو تساوى قياسى مضاد .

ثالثاً : لنأخذ  $\text{أ} = \text{جـ}$  ،  $\text{ب} = \text{د}$  ،  $\text{ل} = \text{أ ب}$  .

واضح أن :

$$\text{سري} (\text{أ}) = \text{أ} = \text{جـ} ،$$

$$I = (\text{سري} \circ \text{سري}) (\text{ب}) = \text{د} .$$

فى كل الحالات السابقه ، برهان على وجود زوجان من التساويات القياسيه يرسلان أ فوق جـ ، ب فوق د . التساوى القياسى المباشر عبارته عن تحصيل انعكاسين ؛ التساوى القياسى المضاد إما أن يكون انعكاساً وإما أن يكون تحصيلاً لثلاثه انعكاسات .

نظريه (٥) (النظريه الأساسيه للتساوى القياسى) :

التساوى القياسى يكون تحصيلاً لثلاثه انعكاسات على الاكثر .

البرهان :

لنفرض أن  $\text{ت}$  تساوى قياسى ؛  $\text{أ}$  ،  $\text{ب}$  ،  $\text{جـ}$  ثلاث نقط غير واقعته على استقامه واحده ،  
 وليكن  $\text{أ}^* = \text{ت} (\text{أ})$  ،  $\text{ب}^* = \text{ت} (\text{ب})$  ،  $\text{جـ}^* = \text{ت} (\text{جـ})$  .

حيث أن  $\text{أ}^* \text{ب}^*$  ،  $\text{أ ب}$  قطع مستقيمه متطابقه ، فمن نظريتنا السابقه ، نجد أنه يوجد إثنان من التسلويات القياسيه يرسلان أ فوق  $\text{أ}^*$  ، ب فوق  $\text{ب}^*$  أحدهما مباش  $\text{ت}$  والآخر مضاد  $\text{ت}$  .

ت ش هو تحصيل لانعكاسين س م ه س م ت ه س م ا ن ت ك س ا ر ا و

تحصيل لثلاثه انعكاسات س م ه س م ت ه س م ا ن ت ك س ا ر ا و .

لناخذ ع = ت ض اذا كان ت ض = س م ، ولكتنا ناخذ ع = ت ش

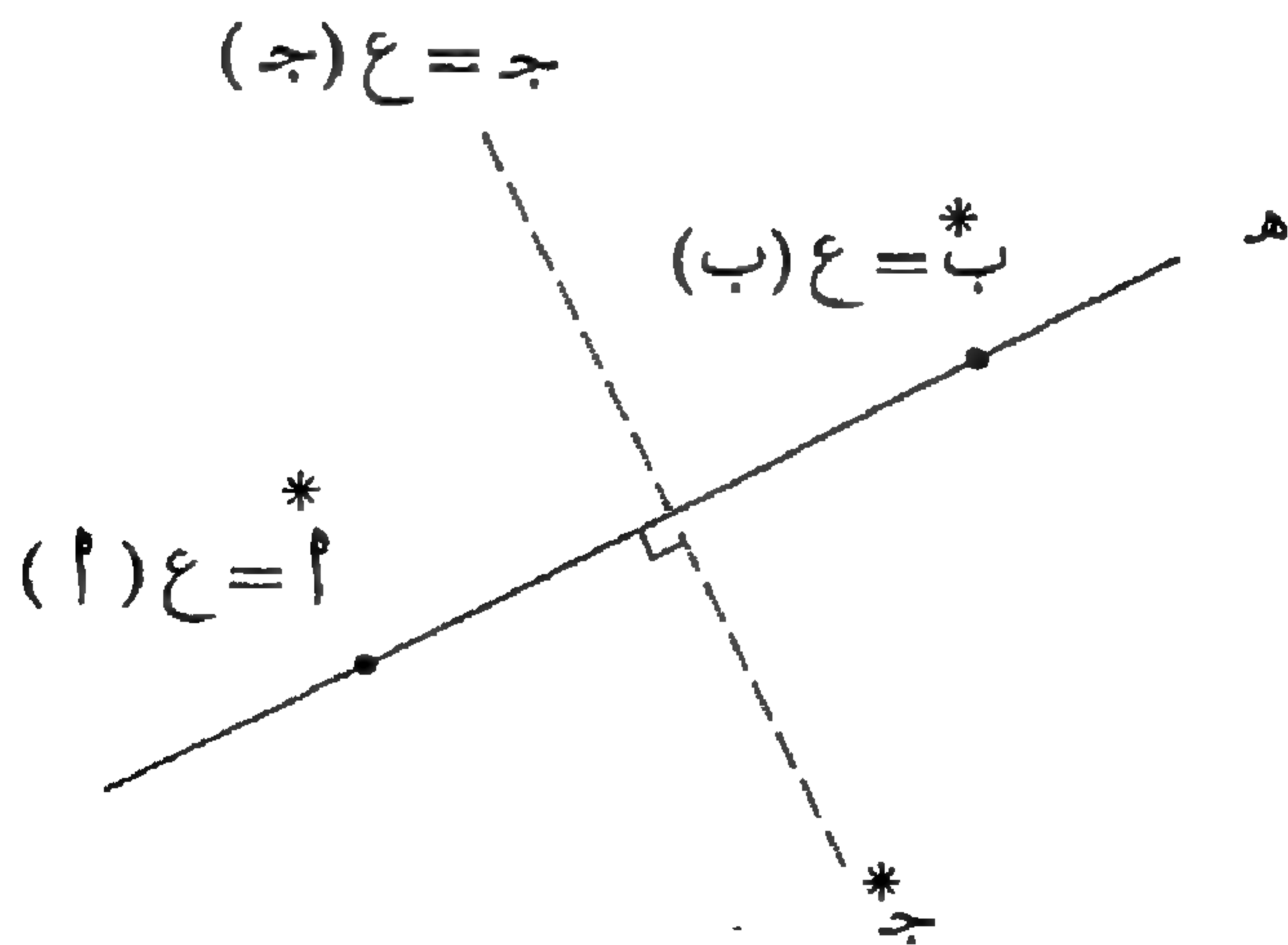
اذا كان ت ض = س م ه س م ا ن ت ك س ا ر ا و .



شكل (٥-١١)

لنعتبر ج = ع (ج) .

اذا كانت ج = ج\* ، فان ع ترسل ا فوق ا\* ، ب فوق ب\* ، ج فوق ج\* .



شكل (٥-١٢)

باستخدام نظريه (٢) ، نجد أن  $t = e$ .

الآن، نفرض أن  $\overline{جـ} \neq \overline{جـ}^*$  ، ولناخذ

$$\overline{هـ} = \overline{أ}^* \overline{ب}^*$$

بما أن  $t = e$  ، تساويات قياسيه ، فان

$$\overline{أجـ} = \overline{أ}^* \overline{ب}^* = \overline{أ}^* \overline{جـ}^*$$

$$\overline{ب} \overline{جـ} = \overline{ب}^* \overline{جـ}^* = \overline{ب}^* \overline{جـ}^*$$

اذن ، النقطتان  $أ^*$  ،  $ب^*$  يكونان على بعد متساوى من طرفى القطعه المستقيمه

$\overline{جـ} \overline{جـ}^*$  . هذا يعنى أن  $\overline{أ}^* \overline{ب}^*$  هو المنصف العمودى للقطعه المستقيمه  $\overline{جـ} \overline{جـ}^*$  .

وبالتالى فان

$$\overline{هـ} (\overline{جـ}) = \overline{جـ}^*$$

لهذا ، فان

$$(\overline{هـ} \ 0 \ e) (أ) = \overline{هـ} (\overline{ع} (أ)) = \overline{هـ} (أ^*) = \overline{أ}^*$$

$$(\overline{هـ} \ 0 \ e) (ب) = \overline{هـ} (\overline{ع} (ب)) = \overline{هـ} (ب^*) = \overline{ب}^*$$

$$(\overline{هـ} \ 0 \ e) (\overline{جـ}) = \overline{هـ} (\overline{جـ}^*) = \overline{جـ}^*$$

مرة أخرى ، باستخدام نظريه (٢) نجد أن

$$\overline{هـ} \ 0 \ e = t$$

اذن، إما :  $ت = (م ه ع)$  أو  $ت = ع$ .

لكن ع تكون إما إنعكاس أو تحصيل انعكاسين . من هذا نستنتج أن ت تكون تحصيلاً  
لثلاثة انعكاسات على الأكثر .

نتيجته (٣) : التساوى القياسى ، إما أن يكون انعكاساً ، انتقالاً ، دوراناً ، أو انعكاساً إنزلاقياً .

نظريته (٦) : إذا كان  $\Delta أ ب ج \cong \Delta أ^* ب^* ج^*$  ، فإنه يوجد تساوى قياسى  
واحد فقط واحد يرسل أ فوق أ\* ، ب فوق ب\* ، ج فوق ج\* .

البرهان :

ليكن ت تساوى قياسى يرسل أ فوق أ\* ، ب فوق ب\* (لأن  $\overline{أ ب} = \overline{أ^* ب^*}$ ) .  
الآن ، لنأخذ  $ج = ت (ج)$  .

لتكن  $ج = ج^*$  معطاه (لأن ت (أ) = أ\* ، ت (ب) = ب\* ) .

إذا كانت  $ج \neq ج^*$  ،  $\underline{ن} = \overline{أ ب^*}$  .

اذن ،  $\underline{ن}$  هو المنصف العمودى للقطعه المستقيمه  $ج ج^*$  (لأن كل من النقط أ\* ، ب\*  
تبعد بمسافه متساويه عن نهايتي القطعه المستقيمه  $ج ج^*$  ) .

لهذا يكون :  $ن (ج) = ج^*$

بالتالى فان

$$(ن ه ت) (أ) = ن (أ^*) = أ^* ،$$

$$(ن ه ت) (ب) = ن (ب^*) = ب^* ،$$

$$(ن ه ت) (ج) = ن (ج) = ج^* .$$

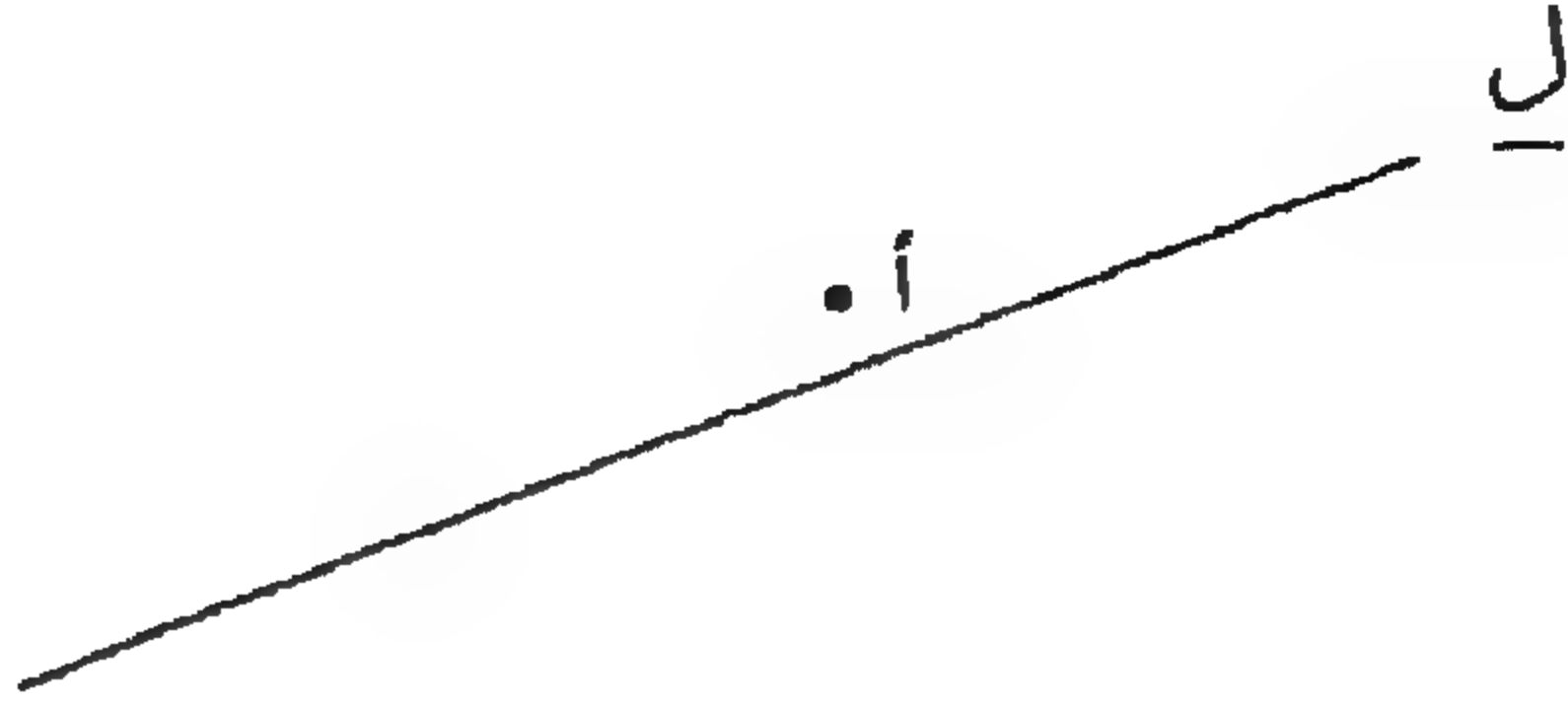
وبهذا نكون قد برهنا على وجود تساوي قياسي (إما أن يكون  $t$  أو  $s$   $t$  هـ) يرسل  
 $\Delta$  أب جـ فوق  $\Delta$  أ\*ب\*جـ\*.

تعريف : يقال لمجموعتين أهما متطابقتان إذا وإذا فقط وجد تساوي قياسي يرسل إحدى المجموعتين  
فوق الأخرى .



## تمارين عامه

١- اذا كانت  $\underline{A}$  في  $\underline{L}$  . فبين محور الانعكاس الانزلاقي  $\underline{S} \circ \underline{S} = \underline{A}$  .

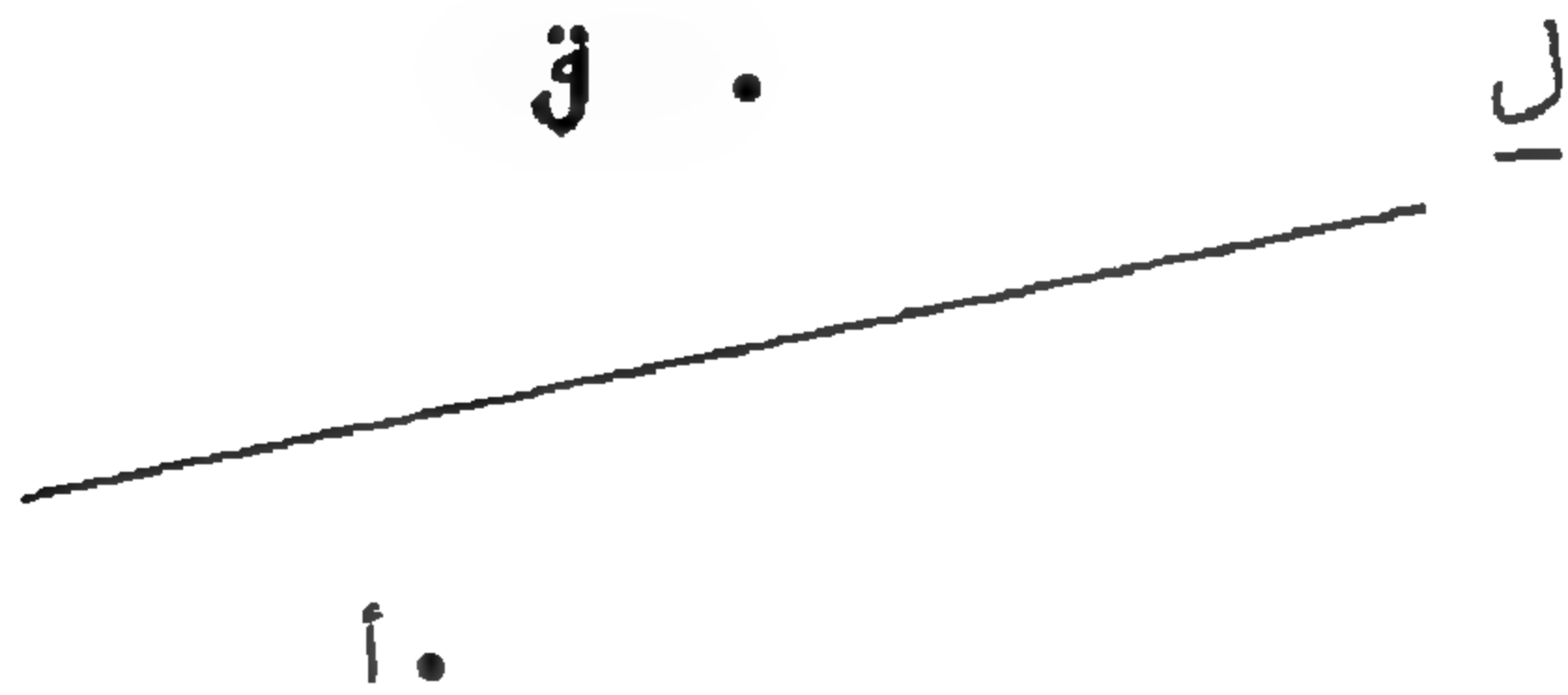


٢- برهن أن : اذا كان  $\underline{A} // \underline{L}$  ، فان  $\underline{S} \circ \underline{S} = \underline{A}$  .

٣- ليكن  $\underline{L}$  خط معطى ؛  $\underline{A}$  ،  $\underline{Q}$  نقط معطاه .

(أ) بين  $\underline{Q} = \underline{S} \circ \underline{S} = \underline{A}$  .

(ب) اوصف محور الانعكاس الانزلاقي  $\underline{S} \circ \underline{S} = \underline{A}$  .



(ج) هل  $\underline{S} \circ \underline{S} = \underline{A}$  ؟



٤- لیکن  $\underline{ل}$  محور الانعکاس الانزلاقی  $\begin{pmatrix} \underline{ت} & 0 \\ \underline{ا} & \underline{س} \end{pmatrix}$  ،  $\underline{ق}$  نقطہ تبعد ٣ عن  $\underline{ل}$  .  
اذا كانت  $\underline{ق} = \begin{pmatrix} \underline{ت} & 0 \\ \underline{ا} & \underline{س} \end{pmatrix} (\underline{ق})$  ،  $\underline{ق} \underline{ق} = ٨$  ، فعین طول  $\underline{أب}$  .

٥- إذا كانت أ (٠،٠) ، ب (٢، ١) ، ج (٢، ٥) نقط معطاه .

(أ) أوجد احداثيات مركز الدوران للراسم

(ب) اذا كانت ق (س ، ص) أى نقطه ، فأوجد احداثيات

ق = ( س ٥ ت ب ج ) - ( ق ) .

٦- أي العبارات التالية يكون صحيحا : 

(أ) إذا كان ل أي خط ، أب أي قطعه مستقيمه ؛ فان

$$\begin{matrix} \text{ت} & & \text{ت} \\ \text{اب} & 0 & \text{اب} \end{matrix} \quad \underline{\text{س}} = \underline{\text{س}} \quad 0$$

(ب) اذا كانت ل، م، ن خطوط متوازيه ، فان سا سم سن .  
يكون انعكاسا .

(ج) اذا كان ن محور الانعكاس الانزلاقي م ، م (ل) // ل ؛ فان ل // ن .

(۴) اذا كان ج د  $\perp$  ل، فان (ت ج)  $\perp$  ل

(هـ) اذا كان  $m$  انعكاس انزلاقی، فان  $m^{-1}$  انعكاس انزلاقی.

(و) تحصیل انعکاسین انزلاقین هو انعکاس انزلاقی .

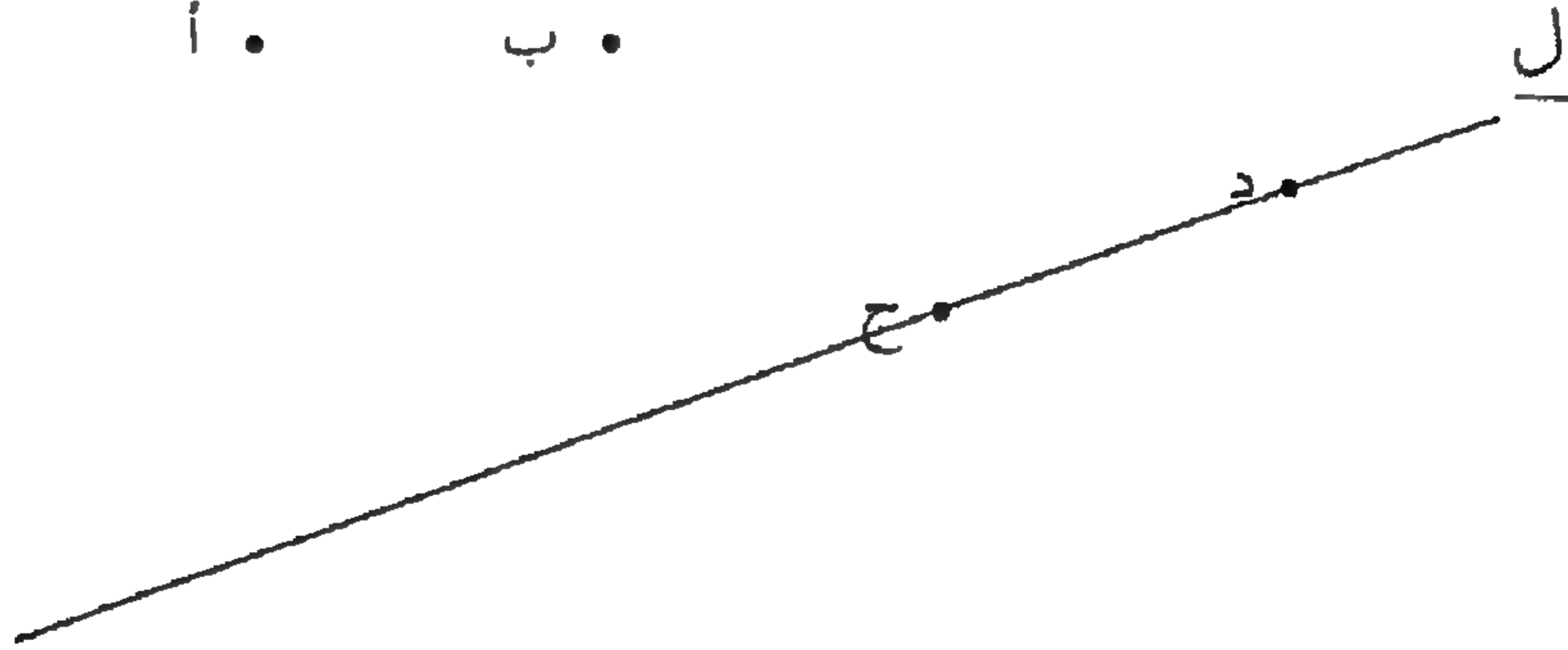
۷-برهن :

(أ) إذا كان  $m$  انعكاس انزلاقي فإن  $m^2$  انتقال .

(ب) اذا كان  $m$  انعكاس انزلاقي فان  $m$  ليس له نقطه ثابتة .

٨- إذا كان  $\underline{ل}$  هو محور السنيات ، أ(٢،٣) ، ب(١،٦) نقط معطاه ، فعين أ ، ب تحت تأثير  $\underline{س١}$  . وكذلك اكتب معادله محور الانعكاس الانزلاقي  $\underline{س٢}$   $\underline{س١}$   $\underline{س٢}$

٩- ليكن  $\underline{ل}$  خطاً ؛ أ ، ب ، ج ، د نقط معطاه كما بالشكل المجاور . عين النقط  $\underline{س}$  ،  $\underline{ص}$  بشرط  $\underline{س} \underline{ص} = \underline{ج} \underline{د}$  حتى يكون طول المسار أ س ص ب أقل ما يمكن .



[إرشاد: أوجد أ\* = (ت ج د س١) (أ) ] .

١٠- لتكن أ ، ب ، أ\* ، ب\* ، ق نقط معطاه بحيث أن  $\underline{أ} \underline{ب} = \underline{أ*} \underline{ب*}$  . برهن أنه يوجد التساوي القياسي  $\underline{س١}$  الذي يرسل أ فوق أ\* ، والتساوي القياسي  $\underline{س٢}$  الذي يرسل ب فوق ب\* .

أوجد  $\underline{ق} = \underline{س١}(\underline{ق})$  ،  $\underline{ق} = \underline{س٢}(\underline{ق})$  .  
ماذا تقول عن القطعه  $\underline{ق} \underline{ق}$  ؟  
أ .

أ .

أ\* .

ب\* .

ق .

١١- ليكن  $\underline{ل}$  خط مار بنقطه الأصل ،  $\theta$  مقياس الزاويه من المحور السيني الى  $\underline{ل}$  ،  
 $\underline{ق}$  ( س ، ص ) أى نقطه . عين  $\underline{س}$   $\underline{ق}$  اذا كان :

$$(أ) \theta = 22,5 \quad (ب) \theta = 135 \quad (ج) \theta = -10 .$$

١٢- اذا كانت  $\underline{و}$  هى نقطه ،  $\underline{ق}$  ( س ، ص ) أى نقطه ، فعين  $\underline{س}$   $\underline{ق}$  .  
 ١٢٠-١١

١٣- باستخدام الحقيقه التاليه :

اذا كان  $\underline{س}$  راسم دوران حول نقطه الأصل يرسل (١،٠) فوق (أ،ب) فان  
 $\theta ، \underline{و}$

$$\underline{س} \quad \underline{ق} = (أ س - ب ص ، ب س + أ ص) \quad \underline{ق} \quad \underline{س} (ص،ص)$$

أوجد  $\underline{س}$  اذا كانت  
 $\theta ، \underline{و}$

$$(أ) \theta = -45 \quad (ب) \theta = 150 \quad (ج) \theta = 270$$

١٤- اوصف الراسم

$$\underline{ت} (س ، ص) = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} س + \frac{\sqrt{2}}{2} ص , -\frac{\sqrt{2}}{2} س + \frac{\sqrt{2}}{2} ص \right)$$

١٥- هل الراسم

$$\underline{ت} (س ، ص) = (2س + ص ، -س + 2ص)$$

راسم انعكاس ؟

١٦- اذا كان  $\underline{س}$  ( س ، ص ) = (أ س - ب ص ، ب س + أ ص )  
 $\theta ، \underline{و}$

فعين  $\underline{س}$   $\underline{ق}$  حيث  $\underline{ق}$  ( س ، ص ) أى نقطه .  
 $\theta ، \underline{و}$

١٧- ليكن  $E = \{(s, v) : v = s^2\}$ . أوجد صورته  $E$  تحت تأثير الراسم  $r$ .

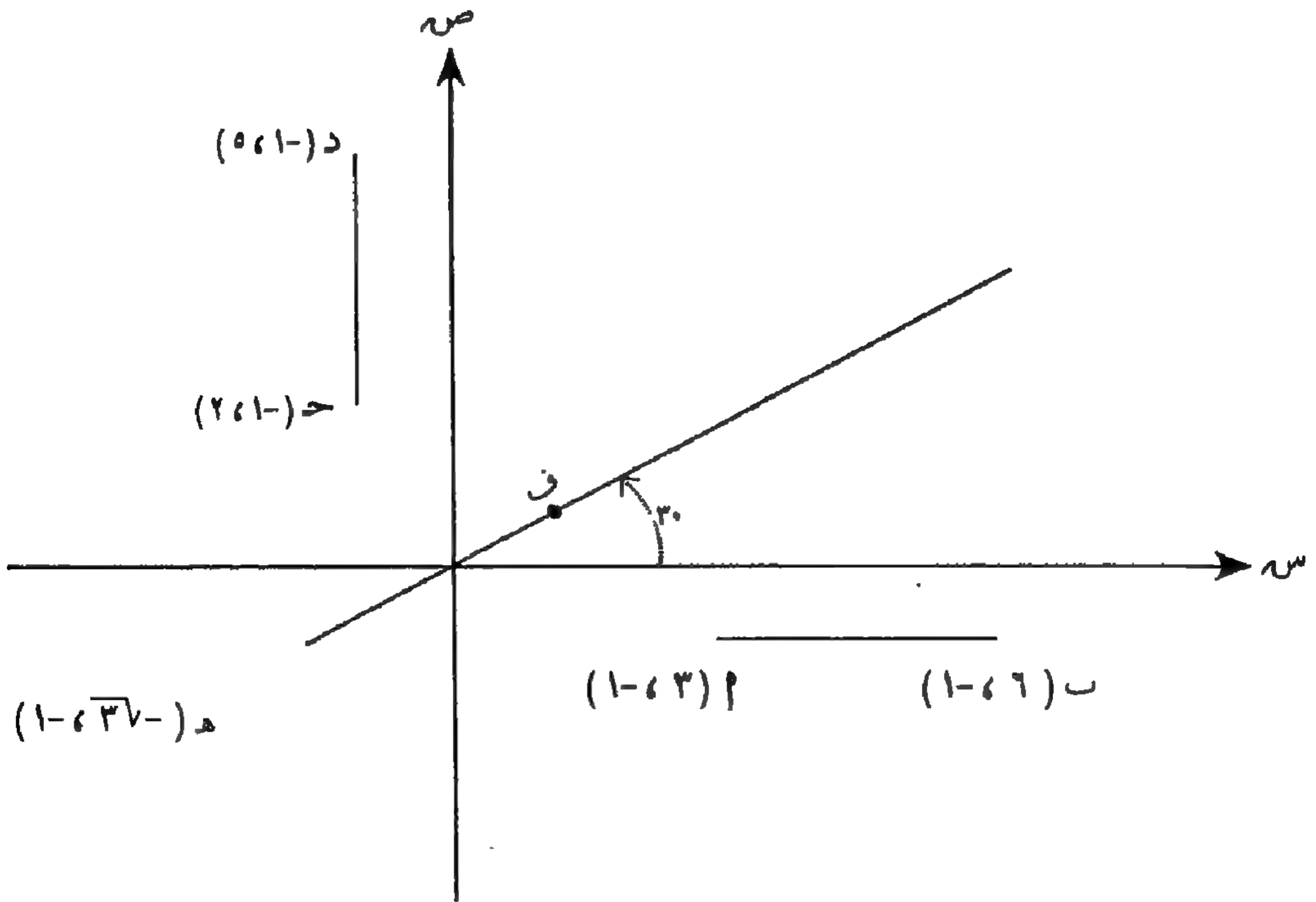
علماً بأن الدوران في اتجاه مضاد لعقارب الساعة .

١٨- لتكن  $AB$  ،  $CD$  ،  $EF$  قطع مستقيمه متطابقه (انظر الشكل ) ،  $Q(s, v)$  أى نقطه .

(أ) أوجد التساوى القياسى المباشر الذى يرسل  $A$  فوق  $CD$  ،  $B$  فوق  $D$  . ثم عين  $T(Q)$ .

(ب) أوجد التساوى القياسى المضاد الذى يرسل  $A$  فوق  $D$  ،  $B$  فوق  $CD$  . ثم عين  $U(Q)$ .

(ج) أوجد التساوى القياسى المباشر  $S$  الذى يرسل  $EF$  فوق  $CD$  ،  $F$  فوق  $D$  ثم عين  $S(Q)$  .



شكل (٥-١٣)

١٩- ليكن  $\Delta$  أ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع . أوجد التساويات القياسيه الست التى ترسل  $\Delta$  أ ب جـ فوق نفسه .

٢٠- ليكن أ ب جـ د مربع . أوجد جميع التساويات القياسيه التى ترسل المربع أ ب جـ د فوق نفسه .

# الباب السادس

## التشابه

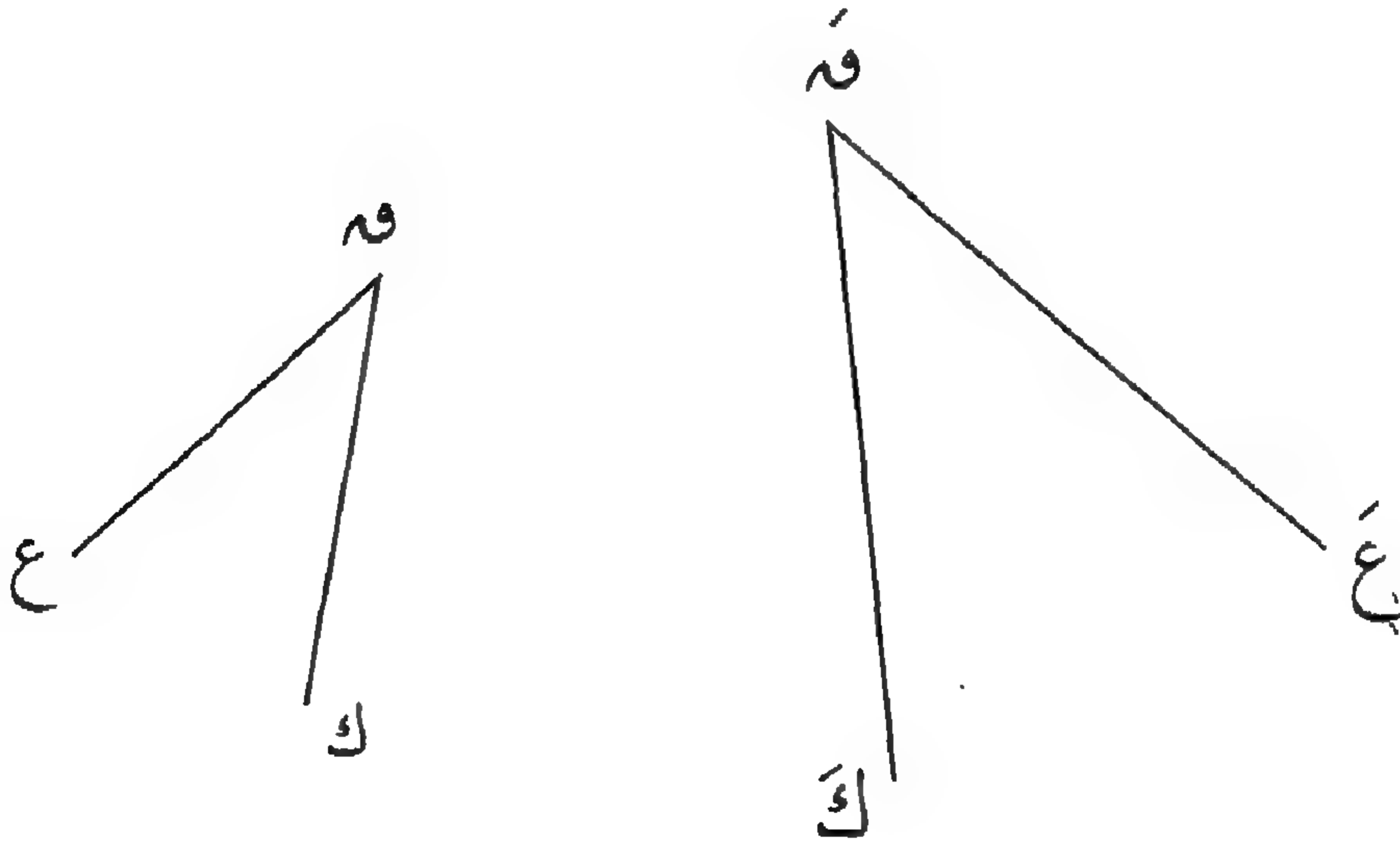
٦-١ : مفهوم التشابه :

تعريف : التحويله تش تسمى تحويله تشابه اذا واذا فقط وجد ثابت  $\lambda >$  بحيث أن

$$\overline{Q'K'} = \lambda \overline{QK} \quad \text{و} \quad \overline{Q'K} = \lambda \overline{QK}$$

$$\overline{Q'K} = \lambda \overline{QK} \quad \text{و} \quad \overline{Q'K} = \lambda \overline{QK}$$

$\lambda$  يسمى ثابت التشابه .



شكل (٦-١)

في شكل (٦-١) ، ثابت التشابه  $\lambda = 2$  . أما اذا كانت  $\lambda = 1$  ، فالتحويله تش

تكون تساوى قياسى . لذلك ، التساويات القياسيه هي مجموعه جزئيه من التشابهات .

نظريه (١) : صوره الخط المستقيم تحت تأثير راسم التشابه تكون خطاً مستقيماً .

البرهان :

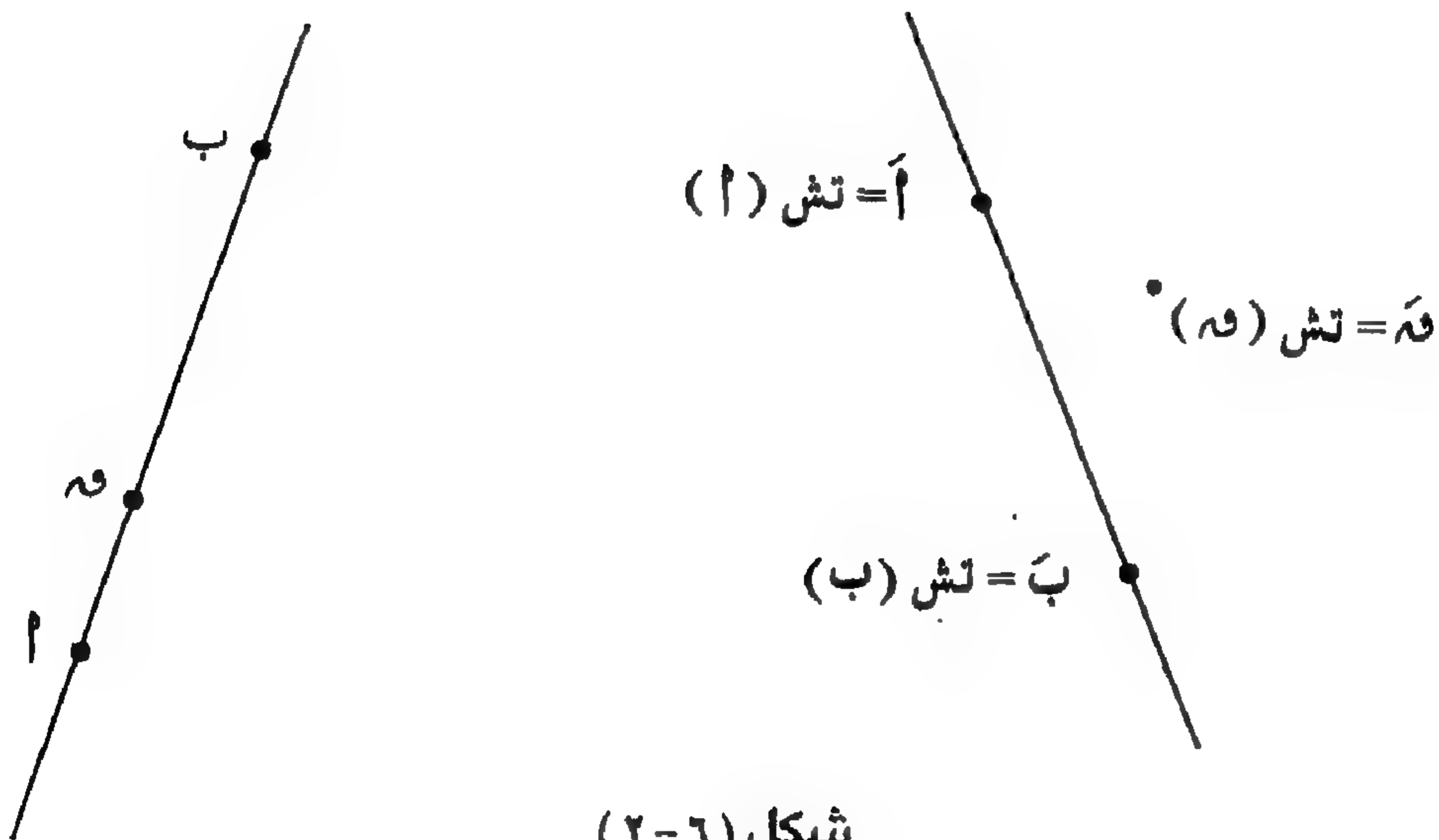
لنأخذ أ ، ب  $\in$  ل حيث  $A \neq B$  ؛ ل أي خط .

المطلوب إثبات أن :  $\text{تش}(\underline{ل}) = \underline{أب'}$   $\longleftrightarrow$

حيث  $أب'$  هو الخط المستقيم المار بصور النقط أ ، ب .

أولاً ، سنبرهن أن :  $\text{تش}(\underline{ل}) \supset \underline{أب'}$   $\longleftrightarrow$

لنأخذ أي نقطه  $ق \in \underline{ل}$  ونثبت  $ق' \in \underline{أب'}$   $\longleftrightarrow$



إذا كانت  $ق$  بين أ ، ب فان

$$\overline{أق} + \overline{قب} = \overline{أب}$$

ولكن

$$\overline{أ'ق'} + \overline{ق'ب'} = \overline{أ'ب'} = \overline{أق} \lambda + \overline{قب} \lambda .$$

$$\overline{\lambda} = (\overline{أ ق} + \overline{ق ب}) = \overline{\lambda (أ ب)}$$

وحيث أن :

$$\overline{\lambda} = \overline{\lambda (أ ب)} = \overline{أ' ب'}$$

فان :

$$\overline{أ' ق' + ق' ب'} = \overline{أ' ب'}$$

من هذا نستنتج أن :  $ق'$  بين  $أ'$  ،  $ب'$  .



إذا كانت  $أ$  بين  $ب$  ،  $ق$  أو إذا كانت  $ق$  بين  $أ$  ،  $ب$  ، فبنفس الطريقة يمكننا برهان أن  $ق' \in \overline{أ' ب'}$  .

بالتالى ، فان صور النقط الواقعة على  $\underline{ل}$  تكون على استقامه واحده ، أى أن



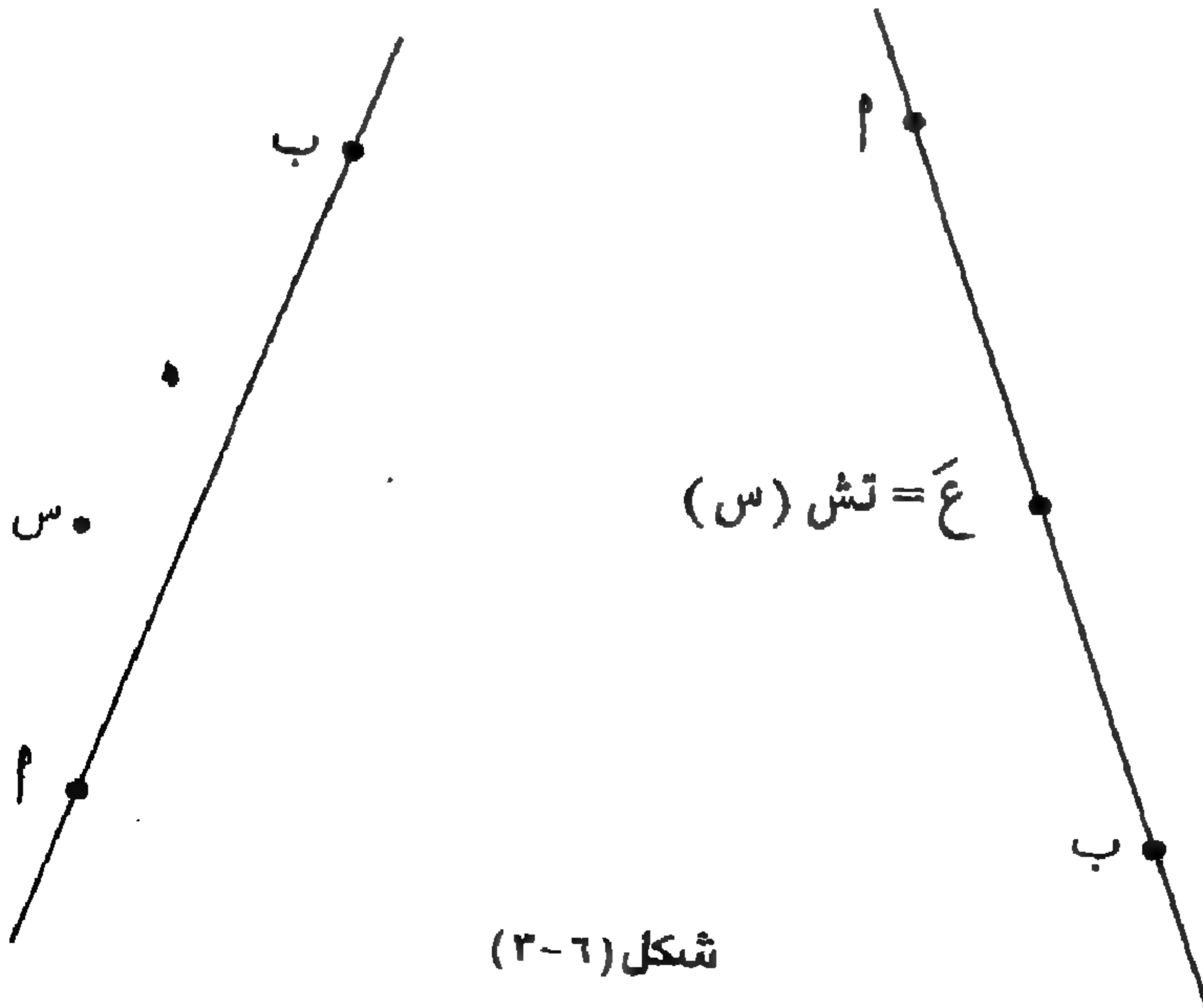
$$\underline{تش} (ل) = \overline{أ' ب'}$$

ولبرهان أن

$$\overline{أ' ب'} = \underline{تش} (ل)$$



فيجب علينا إثبات أن كل نقطه على المستقيم  $أ' ب'$  هى صوره لنقطه ما على  $\underline{ل}$  .



شكل (٦-٣)





لذا تكون كل نقطه على الخط  $\overleftrightarrow{A'B'}$  هي صورته لنقطه واقعہ على  $l$  ، أى

$$\overleftrightarrow{A'B'} \supset \text{تش } (l)$$

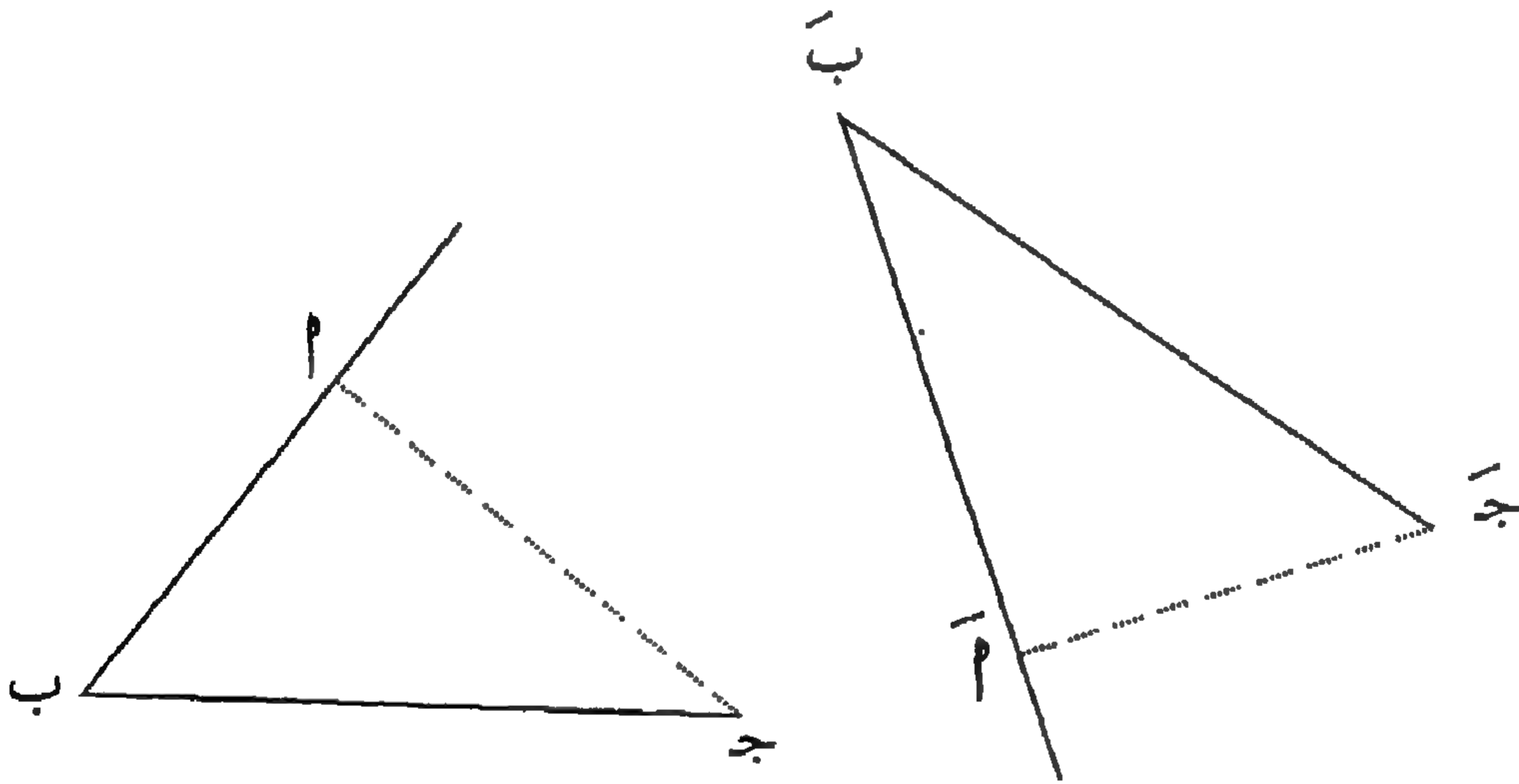
وبهذا نكون قد أثبتنا أن

$$\text{تش } (l) = \overleftrightarrow{A'B'}$$

نظريه (٢) : إذا كانت  $\angle$  تش تحويله تشابه ، فان  
 $\angle A'B'ج = \angle A'جأ$   
 حيث  $\angle A'جأ = \text{تش } (\angle A'جأ)$

البرهان :

لنفرض أن الزاويه  $\angle A'جأ$  هي صورته للزاويه  $\angle أ ب ج$  تحت تأثير تحويله التشابه تش .



شكل (٦-٤)

حيث أن

$$\overline{A'جأ} = \lambda \overline{أ ب ج} , \quad \overline{A'جأ} = \lambda \overline{أ ب ج} ,$$

$$\overline{ب ج} = \overline{ل (ب ج)}$$

فباستخدام نظريه التشابه " $\Delta أ ب ج \sim \Delta أ ب ج$ " يتبع أن :

$$\frac{أ ب}{أ ب'} = \frac{ب ج}{ب' ج'}$$

٦-٢ : التكبير

تعريف : لتكن و نقطه معطاه ،  $\alpha$  . (عدد موجب) الراسم  $ت ك_{\alpha, و}$  يسمى راسم تكبير إذا وإذا

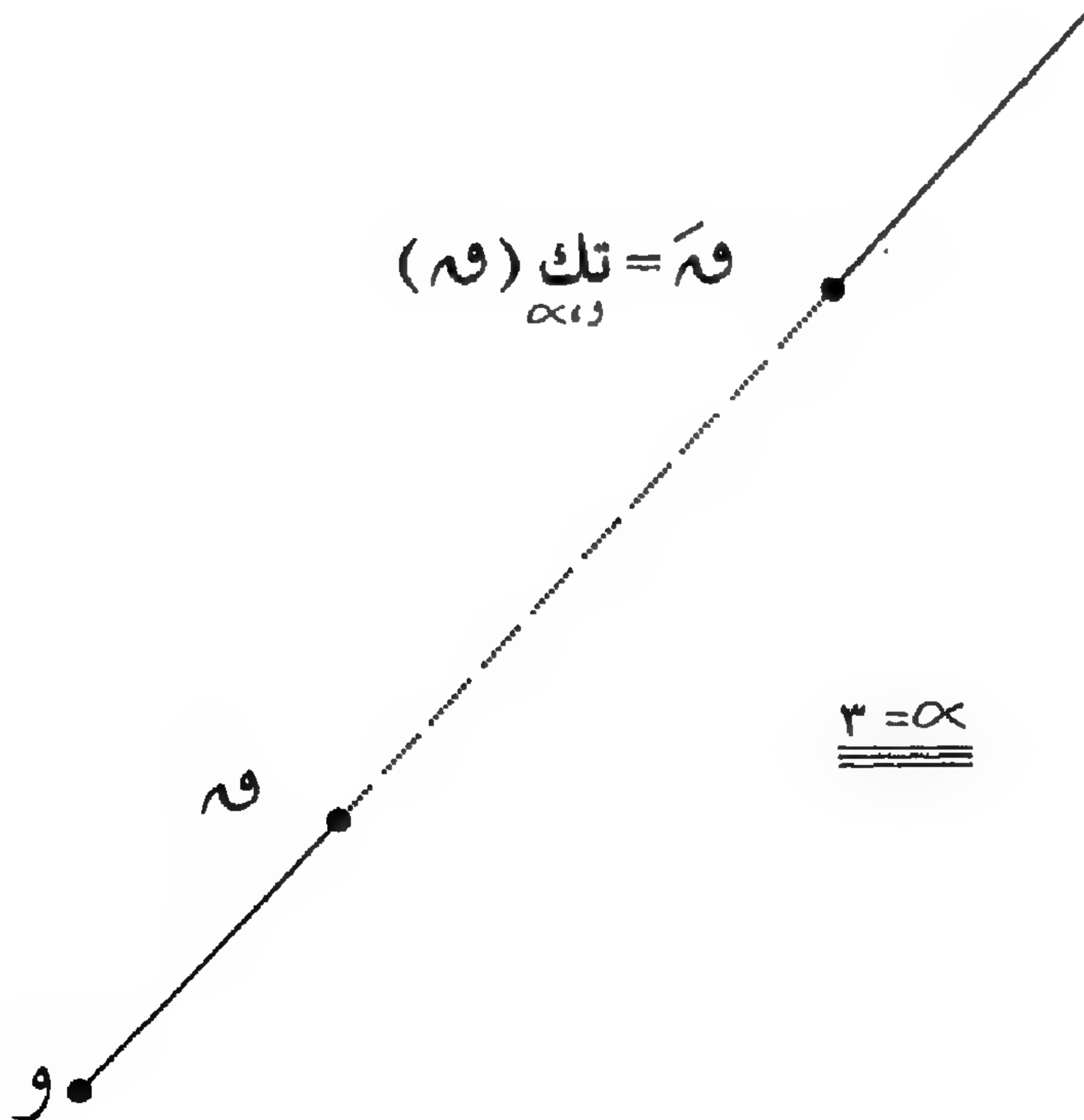
فقط :

$$١- ت ك_{\alpha, و} (و) = و$$

٢- لأي نقطه  $ق \neq و$  ، تكون  $ق' = ت ك_{\alpha, و} ق$  (نقطه واقعته على الشعاع  $وق$  بحيث

$$\overline{وق'} = \alpha \overline{وق}$$

(وبلغه أخرى نقول أن  $ق'$  هي النقطه المحققه للشرط  $وق' = \alpha وق$  )



شكل (٦-٥)

نظريه (٣) : كل تكبير هو تشابه .

البرهان :

برهان هذه النظرية يعتمد على شقين : الاول هو إثبات أن لأي زوج من النقط

المختلفه  $ق، ك$  ،

$$\overline{ق'ك'} = \overline{قك} \alpha$$

والثاني هو إثبات أن  $ت'ك'$  تحويله مستويه .

لكي نثبت أن

$$\overline{ق'ك'} = \overline{قك} \alpha$$

فهناك عدة حالات يمكن دراستها :

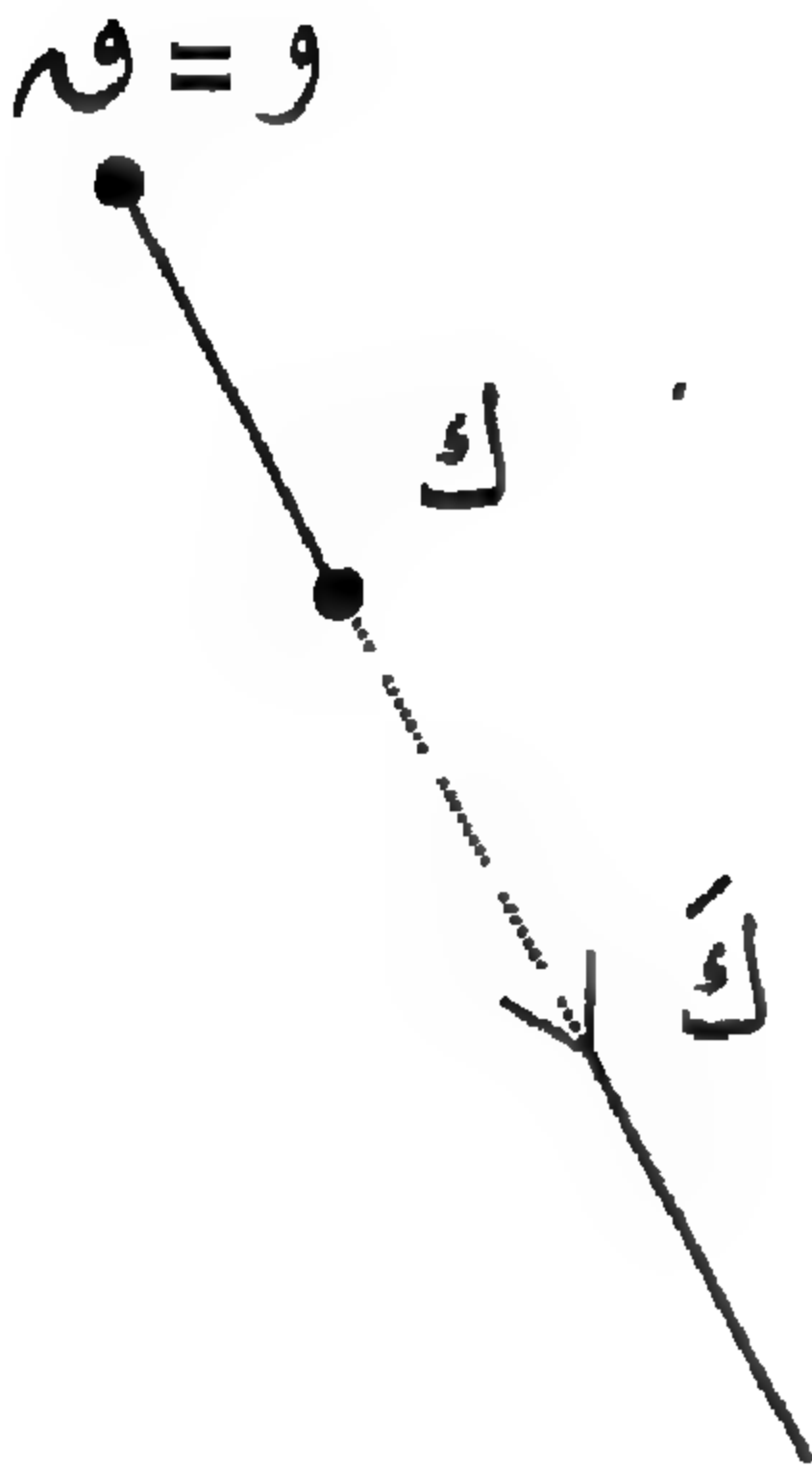
أولا : اذا كانت احدى النقط هي مركز التكبير (ليكن  $ق = و$ ) .

اذن

$$\overline{ق'ك'} = \overline{ق'ك'}$$

$$\overline{ق'ك'} = \overline{ق'ك'}$$

$$\overline{ق'ك'} = \overline{قك} \alpha$$



شكل (٦-٦)

ثانيا: اذا وقعت ك على الشعاع  $وق$  .

في هذه الحاله ، لنفرض أن  $ق$  بين و ، ك بحيث أن

$$\overline{وق} + \overline{قك} = \overline{وك}$$

بالتالى فان :

شكل (٧-٦)

$$\overline{وق} > \overline{وك} \Leftrightarrow \alpha(\overline{وق}) > \alpha(\overline{وك})$$

$$\Leftrightarrow \overline{وق'} > \overline{وك'}$$

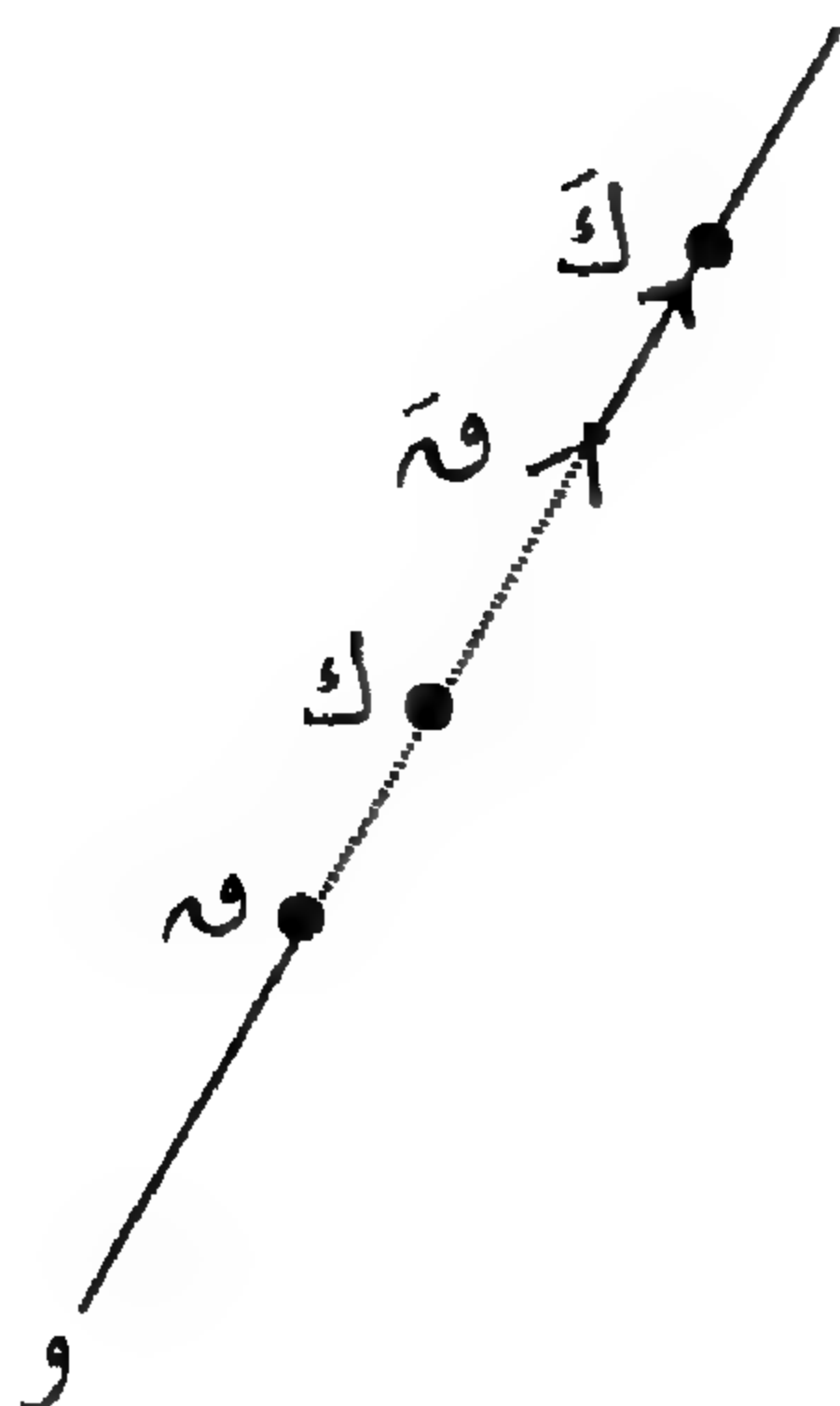
اذن  $\overline{ق}$  تكون بين  $\overline{و}$  ،  $\overline{ك}$  ، وبالتالى

$$\overline{ق'ك'} = \overline{وك'} - \overline{وق'}$$

$$\alpha(\overline{ق'ك'}) = \alpha(\overline{وك'}) - \alpha(\overline{وق'})$$

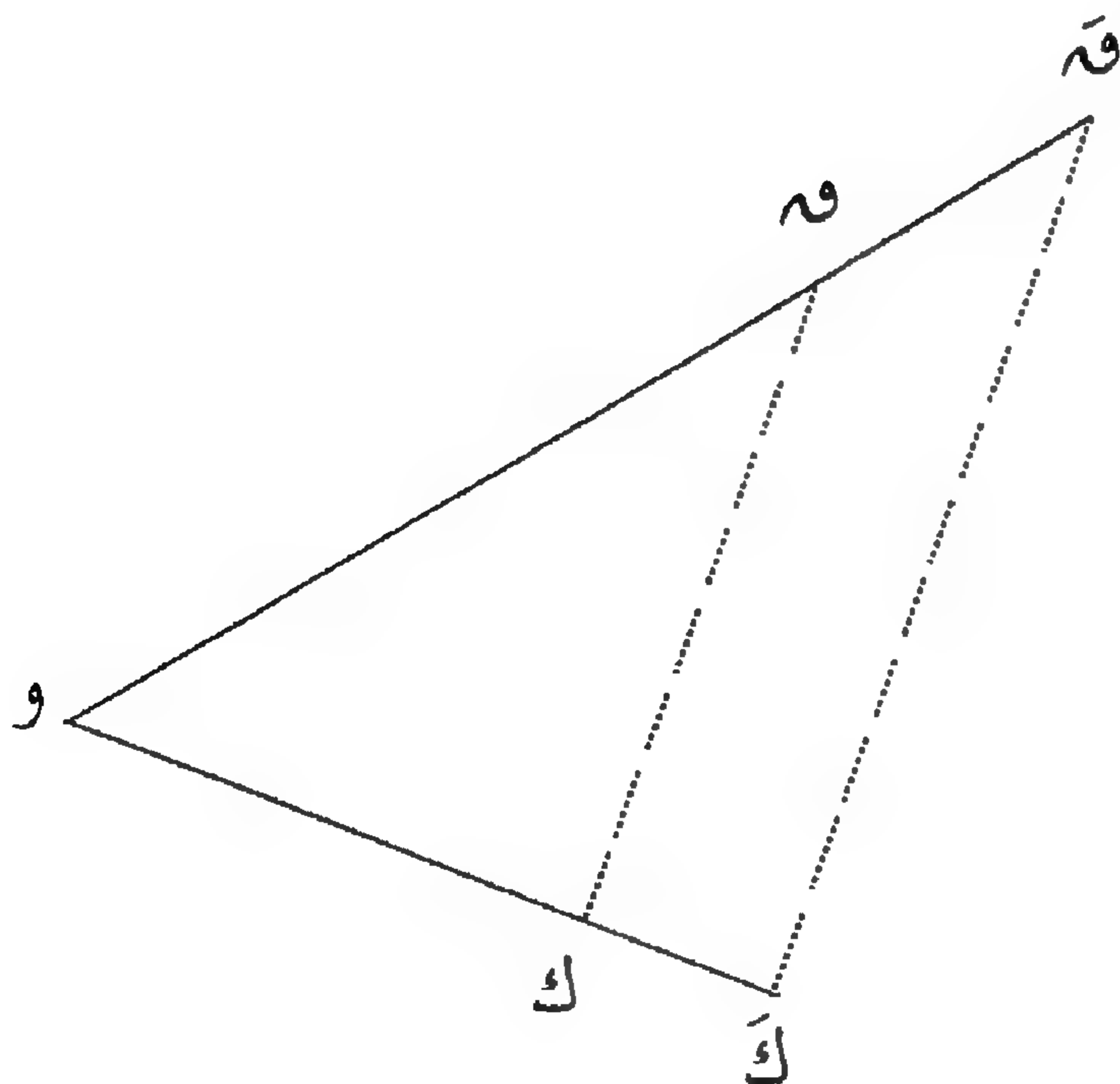
$$= \alpha(\overline{وك}) - \alpha(\overline{وق})$$

$$= \alpha(\overline{قك}) .$$



شكل (٧-٦)

ثالثاً : نفرض أن النقط  $\overline{و}$  ،  $\overline{ق}$  ،  $\overline{ك}$  غير واقعه على استقامه واحده.



شكل (٨-٦)

بما أن

$$\overline{ق' \alpha} = \overline{ق' \alpha}$$

$$\overline{ق' \alpha} = \overline{ق' \alpha}$$

فان

$$\frac{\overline{ق' \alpha}}{\overline{ق' \alpha}} = \frac{\overline{ق' \alpha}}{\overline{ق' \alpha}}$$

ومن نظريه التشابه "  $\Delta ق' ك \sim \Delta ق ك$  " ينتج أن :

$$\alpha = \frac{\overline{ق' \alpha}}{\overline{ق' \alpha}} = \frac{\overline{ق' \alpha}}{\overline{ق' \alpha}}$$

اذن ، لجميع النقط  $ق$  ،  $ك$  يكون

$$\overline{ق' ك} \alpha = \overline{ق' ك}$$

الآن ، يتبقى لنا إثبات  $\overline{ق' ك} \alpha$  أن تحويله مستويه .

علينا أولاً ملاحظه أن كل نقطه في المستوى ، لها صورته واحده تماماً تحت

تأثير التحويله  $\overline{ق' ك} \alpha$  .

برهان أن التحويله  $\overline{ق' ك} \alpha$  احاديه — يترك كتمرين.

أخيراً ، يجب علينا اثبات أن : لكل نقطه  $ص$  توجد نقطه  $س$  بحيث أن

$$\overline{ق' ك} \alpha (س) = ص$$

إذا كانت  $س \in \overleftarrow{وص}$  بحيث أن

$$\overleftarrow{\text{وس}} = \frac{1}{\alpha} \overleftarrow{\text{(وص)}}$$

فان هذا يؤكد لنا أن  $\overleftarrow{\text{تك}}$  يرسل س فوق ص .

وبالتالى فان  $\overleftarrow{\text{تك}}$  تحويلة مستويه .

ملاحظه (١) : حيث أن التشابه يرسل الخطوط فوق الخطوط ، ويحافظ على التوازي والتعامد . لذلك فالتكبير يكون له نفس الخواص .

نظريه (٤) : اذا كان  $\overline{\text{ل}}$  صورته خط معطى  $\underline{\text{ل}}$  تحت تأثير راسم التكبير  $\overleftarrow{\text{تك}}$  ، فان

$$\underline{\text{ل}} = \underline{\text{ل}} \quad \text{اذا كانت } \underline{\text{و}} \perp \underline{\text{ل}} ,$$

$$\underline{\text{ل}} // \underline{\text{ل}} \quad \text{اذا كانت } \underline{\text{و}} \nparallel \underline{\text{ل}} .$$

البرهان : يترك كتمرين .

من السهل اثبات أن : اذا كانت و هي نقطه الأصل ،  $\overleftarrow{\text{ق}}$  (س، ص) أى نقطه ، فان

$$\overleftarrow{\text{و، تك}} (\text{س، ص}) = (\alpha \text{ س، } \alpha \text{ ص})$$

أو

$$\begin{pmatrix} \alpha \text{ س} \\ \alpha \text{ ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

حيث

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

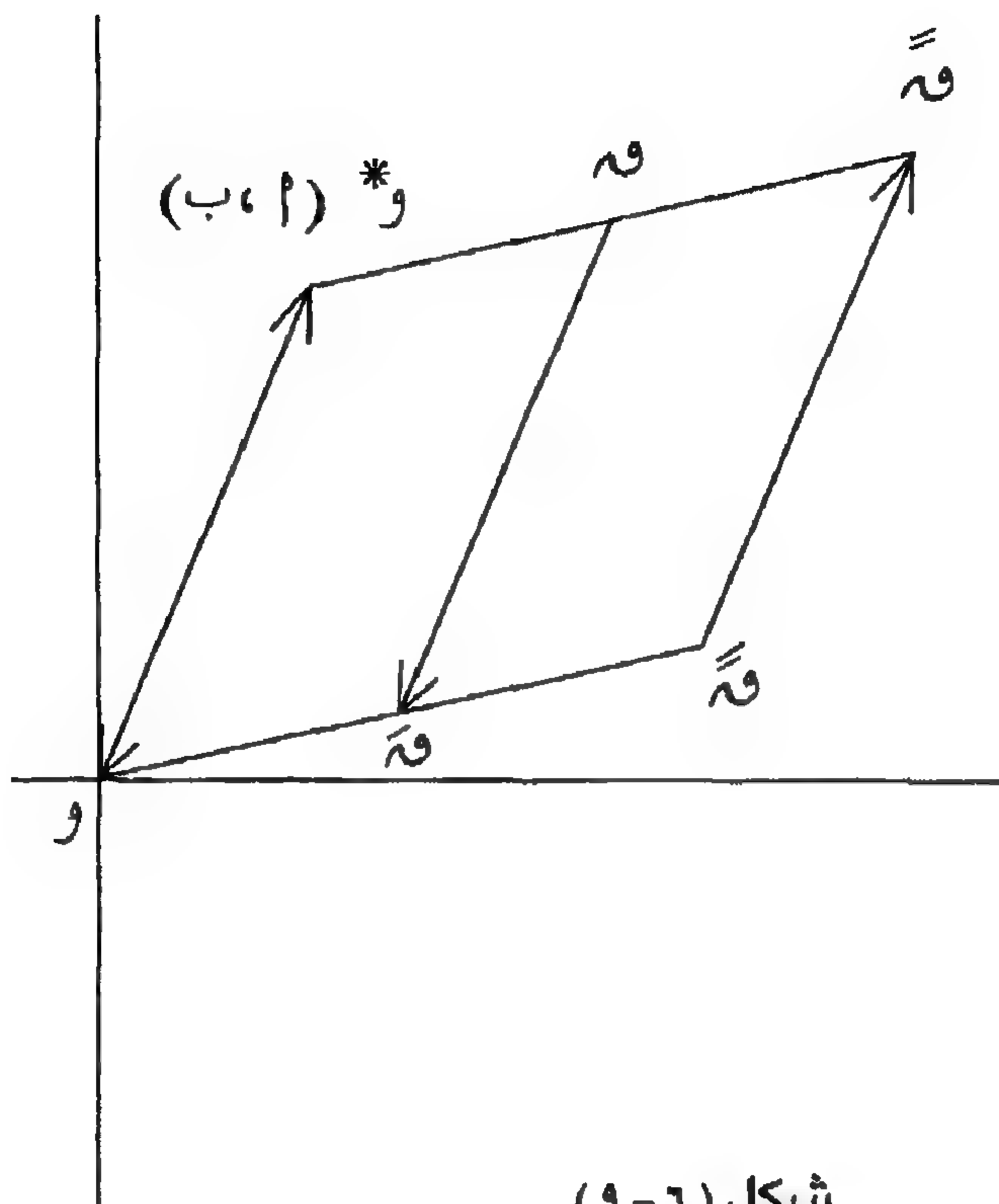
هى مصفوفه التحويل المناظرة للتكبير .

ولكن اذا كانت  $\text{و}^* = (\text{أ، ب})$  ؛ فان  $\overleftarrow{\text{تك}}$  يكافئ تحصيل ثلاثه

رواسم : الأول إنتقال يرسل و\* فوق و ، الثاني تكبير مركزه و ، الثالث انتقال يرسل

وفوق و\* ، أى

$$T_{\alpha, r} = T_{\alpha, r} \circ T_{\alpha, r} \circ T_{\alpha, r} \circ \dots$$



شکل (۶-۹)

او

تک (ق) = (ت ر) ۰ تک ۰ (ت ر) (ق)

(ت) = (ت) ° (ت) (ت) (ت)

$(\text{ت}, \text{ث}) = (\text{ت}, \text{ث})$  (س-أ، ص-ب)

ت = (تک (س - ا، ص - ب) )

$$= \alpha (s - \alpha) , \alpha (v - \beta)$$



$$= (\alpha - \alpha + \alpha, \alpha - \alpha + \alpha) =$$

$$= (\alpha + \alpha - \alpha, \alpha + \alpha - \alpha) =$$

وهذه النتيجة يمكن صياغتها في النظرية التالية:

نظرية (٥): إذا كان  $\alpha$  راسم تكبير مركزه  $\alpha$  وعامله القياسي  $\alpha$ ،  $\alpha$ ،  $\alpha$

أي نقطة ؛ فإن

$$= (\alpha + \alpha - \alpha, \alpha + \alpha - \alpha) = (\alpha + \alpha - \alpha, \alpha + \alpha - \alpha) =$$

ملاحظة (٢): الراسم  $\alpha$  المعروف بالقاعدة

$$= (\alpha + \alpha - \alpha, \alpha + \alpha - \alpha) = (\alpha + \alpha - \alpha, \alpha + \alpha - \alpha) =$$

حيث  $\alpha < 1$ ،  $\alpha \neq 1$  يكون راسم تكبير .

ولتعيين مركز التكبير ، فعلينا ملاحظه أن :

$$= \frac{\alpha}{\alpha - 1}$$

لذلك ، فإن

$$= (\alpha + \alpha - \alpha, \alpha + \alpha - \alpha) = (\alpha + \alpha - \alpha, \alpha + \alpha - \alpha) =$$

وباستخدام نظرية (٥) ، يتضح أن  $\alpha$  راسم تكبير مركزه :

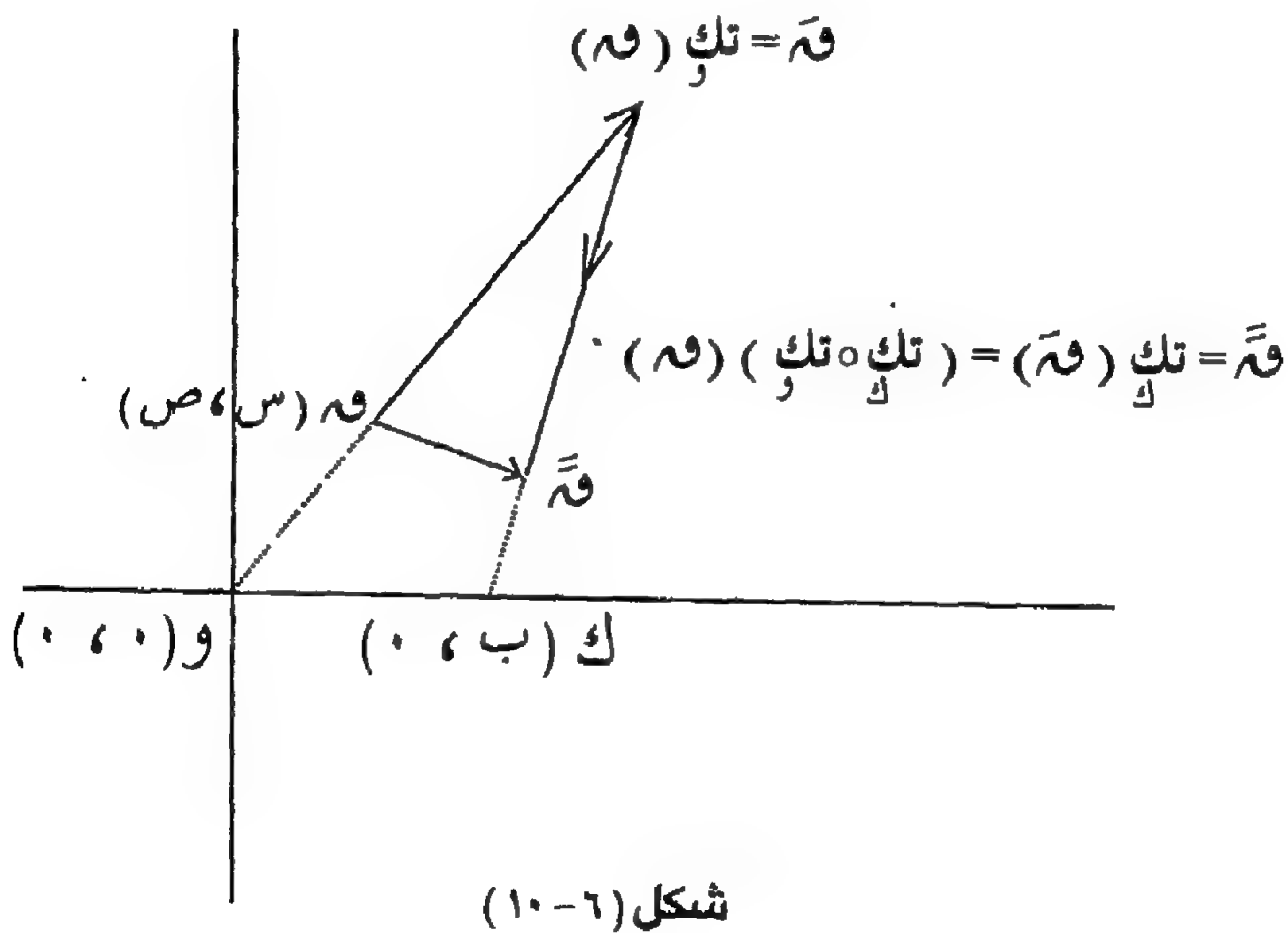
$\alpha =$  وعامله القياسي  $\left( \frac{\alpha}{\alpha - 1}, \frac{\alpha}{\alpha - 1} \right)$

نتیجہ (۱): تحصیل تکبیرین  $\alpha, \beta$  ،  $\alpha$  تک (حيث  $\alpha \neq \beta$ ) هو تکبير  $\alpha, \beta$

حيث جـ  $\exists$  و كـ ،  $\beta \alpha \neq 1$  . واذا كان  $\beta = \alpha$  ، فان التحصيل يكون انتقالاً موازياً للنخط و كـ .

البرهان :

حتى تكون حساباتنا بسيطة ، فاننا نختار  $(0,0)$  ، ك  $(b,0)$  كما هو موضح  
 بشكل (٦-١٠)



من نظریه (۵) ، یکون لای نقطه  $Q$  (س،ص)

تلك  $(\alpha, \alpha) = (\alpha, \alpha)$  (ج)

$$\text{تك}_{\beta, \kappa} (\text{ق}) = (\beta \text{ س} + \text{ب} (\beta - 1), \beta \text{ ص})$$

بالتالى ، فان

$$(\text{تك}_{\beta, \kappa} \circ \text{تك}_{\alpha, \omega}) (\text{ق}) = \text{تك}_{\beta, \kappa} (\text{تك}_{\alpha, \omega} (\text{ق}))$$

$$= \text{تك}_{\beta, \kappa} (\alpha \text{ س}, \alpha \text{ ص})$$

$$(i) \quad (\beta \text{ س} + \text{ب} (\beta - 1), \beta \text{ ص}) =$$

اذا كان  $\beta \alpha \neq 1$  ، فان (i) تكتب فى الصوره

$$(\text{تك}_{\beta, \kappa} \circ \text{تك}_{\alpha, \omega}) (\text{ق}) = (\beta \text{ س} + \frac{\beta \text{ ب} - \text{ب}}{\beta \alpha - 1}, (\beta \alpha - 1) \text{ ص})$$

باستخدام نظريه (٥) ينتج أن :

$$(\text{تك}_{\beta, \kappa} \circ \text{تك}_{\alpha, \omega}) \text{ هو تكبير ، مركزه النقطه}$$

$$\text{جـ} \left( 0, \frac{\beta \text{ ب} - \text{ب}}{\beta \alpha - 1} \right) \text{ وعامله القياسى } \beta \alpha .$$

$$\text{أى أن : } \text{تك}_{\beta, \kappa} \circ \text{تك}_{\alpha, \omega} = \text{تك}_{\beta \alpha, \kappa}$$

يمكنك ملاحظه أيضاً أن جـ و و ك

على الجانب الآخر ، اذا كان  $\beta \alpha = 1$  ، و  $\kappa \neq 0$  ؛ فان ب  $\neq 0$  ، وبالنظر الى

$$\text{المعادله (i)} \quad \text{يتضح أن } (\text{تك}_{\beta, \kappa} \circ \text{تك}_{\alpha, \omega}) \text{ هو إنتقال فى اتجاه يوازى و ك ،}$$

لأن أى نقطه ق (س، ص) ترسل فوق ق (س + ب - ب ، ص) .

نتيجه (٢) : لنفرض أن وهى مركز التكبير لكل من  $\text{تك}_{\alpha, \omega}$  ،  $\text{تك}_{\beta, \kappa}$  .

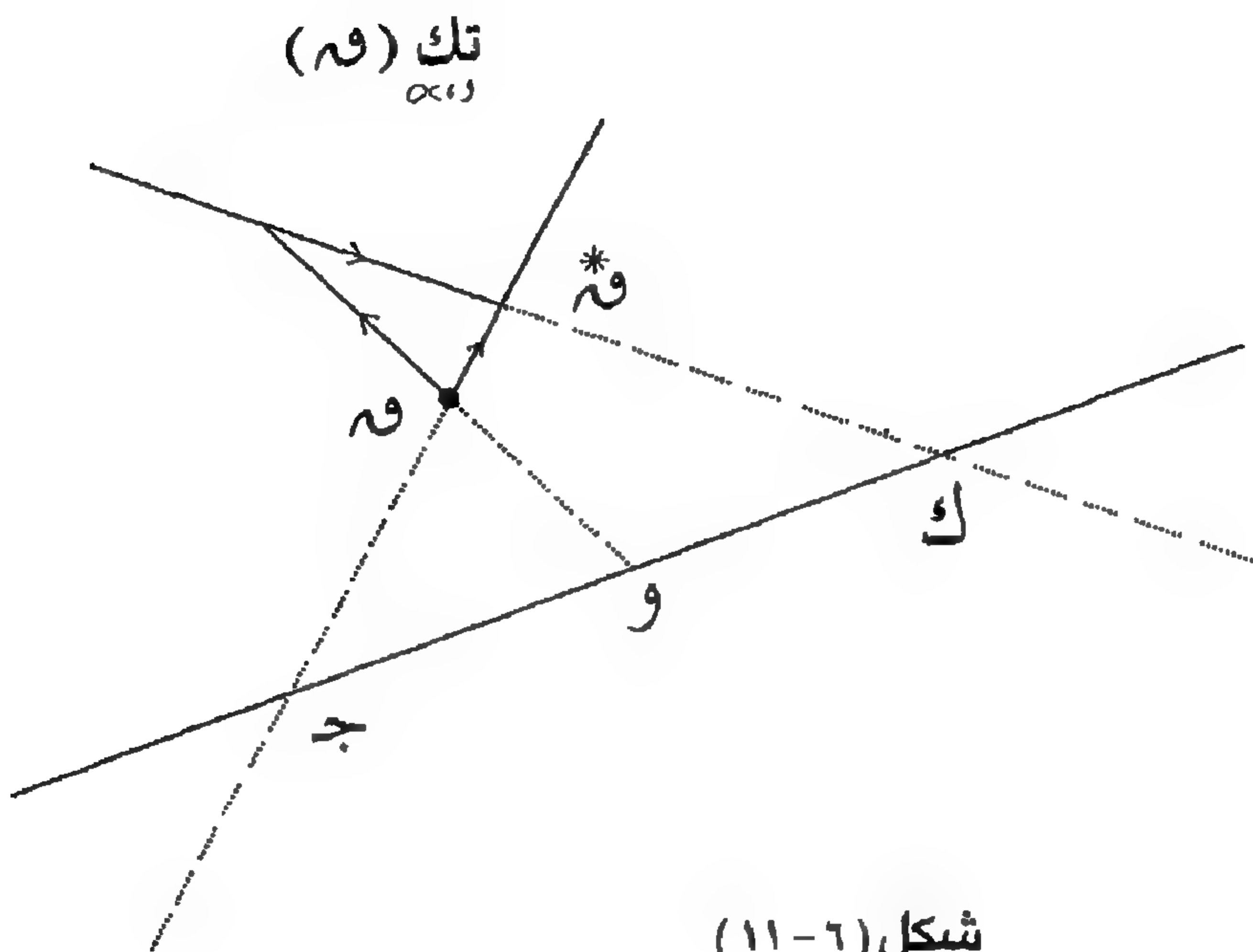
اذا كان  $\beta \alpha \neq 1$  ، فان

$$\text{تك}_{\beta \alpha, \kappa} = \text{تك}_{\beta, \kappa} \circ \text{تك}_{\alpha, \omega}$$

إذا كان  $\beta\alpha = 1$  ، فان

$$I = \text{تك}_{\alpha, \beta} \circ \text{تك}_{\beta, \alpha}$$

\* نتیجه (۳) : لأي تكبير  $\text{تك}_{\alpha, \beta}$  ، يوجد معكوس  $\text{تك}_{\beta, \alpha}^{-1} = \text{تك}_{\beta, \alpha}$  .



حتى نتيين موضع مركز التكبير  $(\text{تك}_{\beta, \alpha} \circ \text{تك}_{\alpha, \beta})$  فاننا نلاحظ أن :

$$\text{ق}^* = (\text{تك}_{\beta, \alpha} \circ \text{تك}_{\alpha, \beta})(\text{ق}) = \text{تك}_{\beta\alpha, \alpha\beta}(\text{ق})$$

أولا ، لاحظ أن  $\text{ج} \leftrightarrow \text{ق}^*$  من تعريف التكبير . والآن باستخدام نتیجه (۱) لاحظ أن  $\text{ج} \leftrightarrow \text{و}^*$  . من هذا نستنتج أن

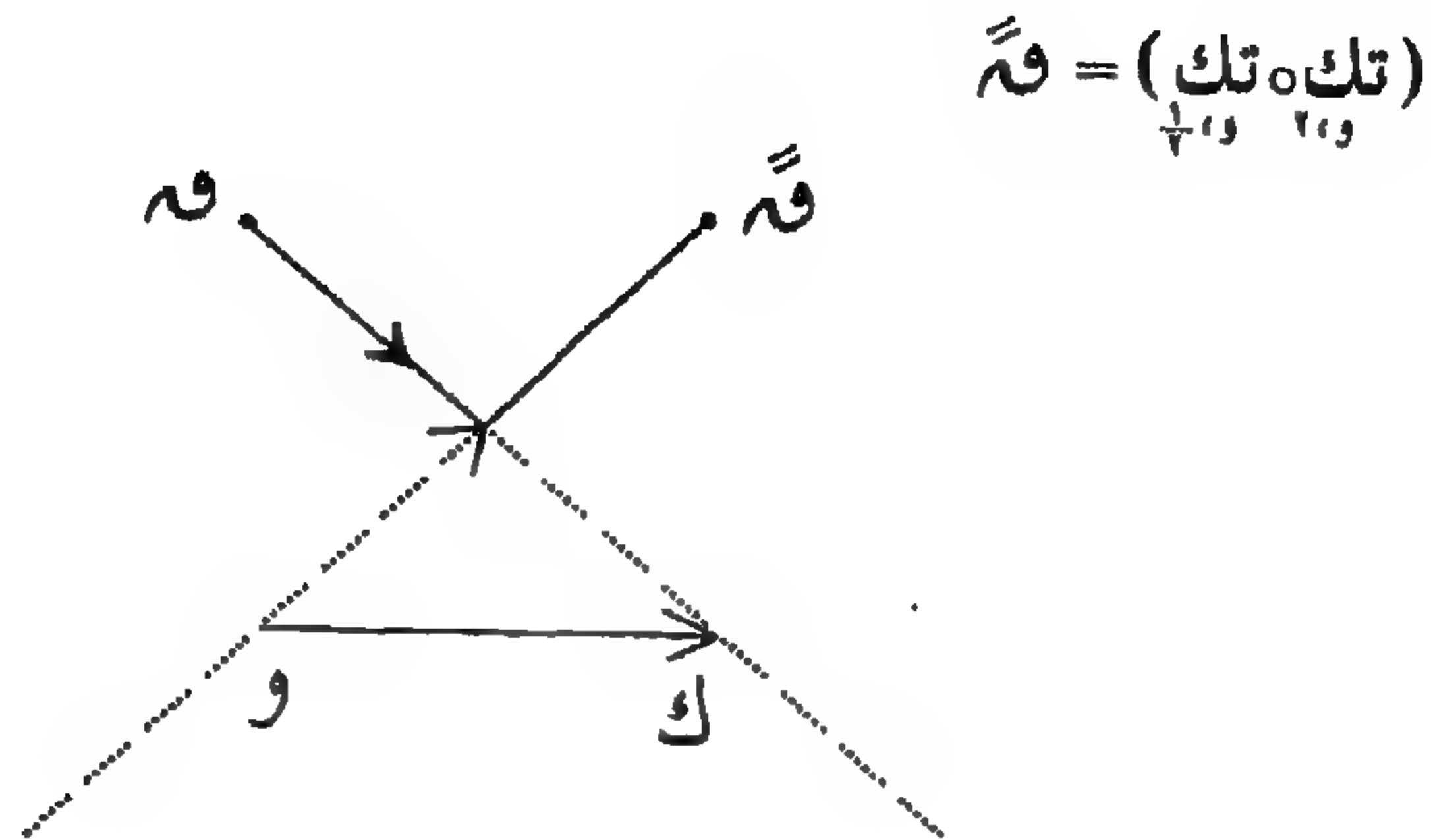
$$\text{ج} = \text{و} \cap \text{ق}^* \text{ق}^*$$

نظريه (٦) : اذا كان  $\vec{t} = \vec{t}_{(2,1)}$  راسم انتقال ما ؛  $\vec{t}_{(2,1)}$  ،  $\vec{t}_{(1,2)}$  ،  $\vec{t}_{(1,2)}$  رواسم تكبير معطاه ،

فان

$$\vec{t} = \vec{t}_{(2,1)} \circ \vec{t}_{(1,2)} = \vec{t}_{(1,2)}$$

البرهان :



شكل (٦-٢١)

باستخدام نتيجة (١) ، نجد أن

$$\vec{t}_{(2,1)} \circ \vec{t}_{(1,2)} = \vec{t}_{(1,2)}$$

حيث  $\vec{t}_{(1,2)}$  انتقال ما .

المطلوب اثبات أن :  $\vec{t}_{(1,2)} = \vec{t}_{(2,1)}$

أى علينا اثبات أن :  $\vec{t}_{(1,2)} = \vec{t}_{(2,1)}$

لنعتبر أن

$$\vec{t}_{(1,2)} = \vec{t}_{(2,1)} \circ \vec{t}_{(1,2)}$$

$$= \text{تك} \begin{smallmatrix} ٢,٩ \\ \text{ك} \end{smallmatrix} \text{ (ك) } \text{تك} \begin{smallmatrix} ١,٩ \\ \text{ك} \end{smallmatrix}$$

$$= \text{تك} \begin{smallmatrix} ٢,٩ \\ \text{ك} \end{smallmatrix} = \text{ك} //$$

حيث ك منتصف القطعه المستقيمه و "ك"

لهذا فان  $\overrightarrow{\text{وك}} = \overrightarrow{\text{ك ك"}}$

بالتالى تكون

$$\overrightarrow{\text{وك}} = \overrightarrow{\text{ج د}}$$

$$\text{ت} = \text{ج د} = \text{تك} \begin{smallmatrix} ٢,٩ \\ \text{ك} \end{smallmatrix} = \text{تك} \begin{smallmatrix} ١,٩ \\ \text{ك} \end{smallmatrix}$$

نظريه (٧) : تحصيل أى عدد من التكبيرات والتساويات القياسيه يكون تشابهاً .

فى نهايه هذا البند ، سنقوم ببرهان الحقيقه التاليه :

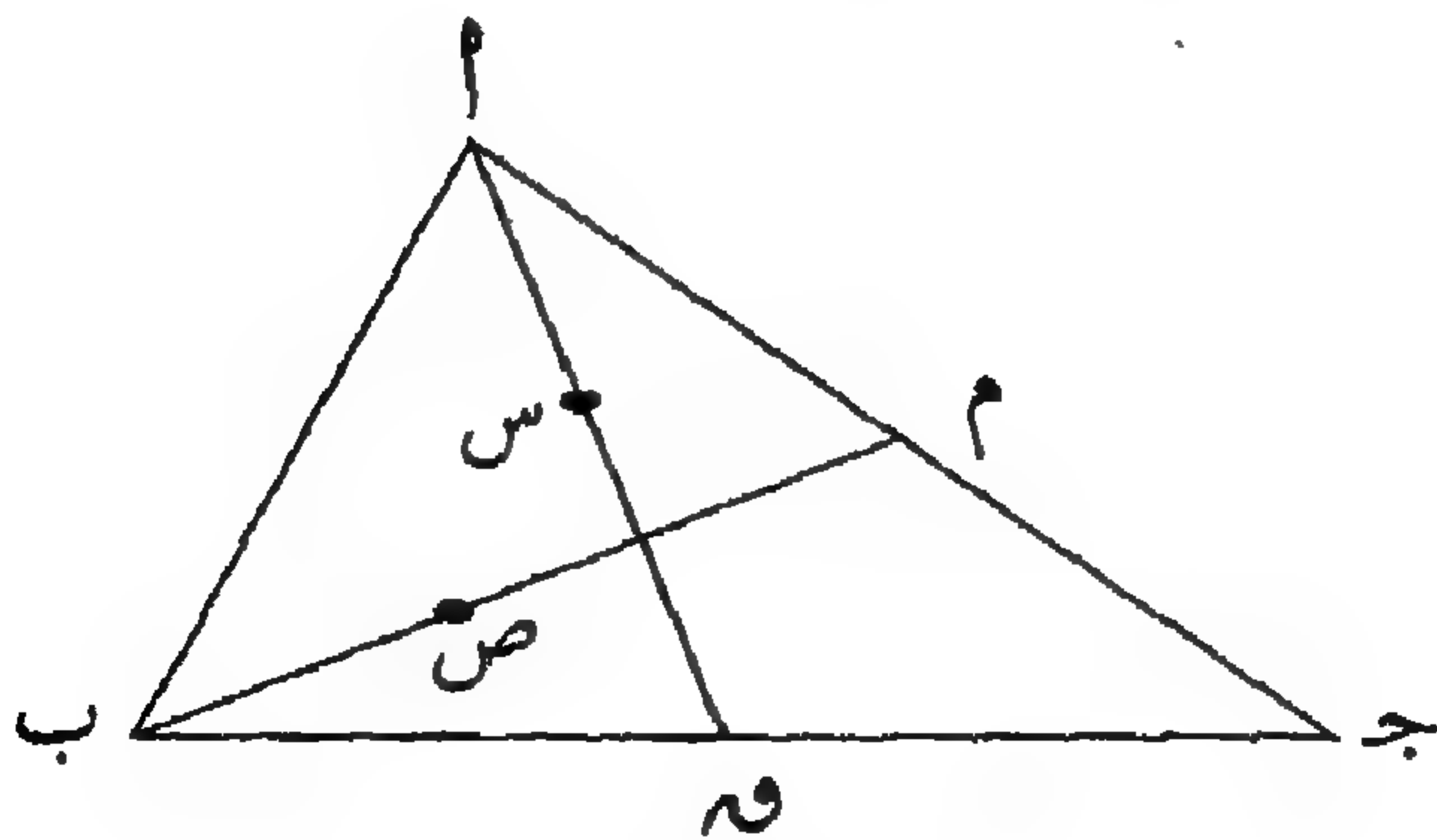
\* "المستقيمات المتوسطه للمثلث تتلاقى فى نقطه واحده"

بما أن

$$\text{س} = \text{تك} \begin{smallmatrix} ٢,٩ \\ \text{ن} \end{smallmatrix} \text{ (ن) } , \text{ ن} = \text{تك} \begin{smallmatrix} ١,٩ \\ \text{ب} \end{smallmatrix} \text{ (جـ) }$$

فان

$$\text{س} = \text{تك} \begin{smallmatrix} ٢,٩ \\ \text{ن} \end{smallmatrix} = \text{تك} \begin{smallmatrix} ١,٩ \\ \text{ب} \end{smallmatrix} \text{ (جـ) (١٣) }$$



شكل (٦-١٣)

وحيث أن

$$\begin{aligned} \text{تك} &= \text{تك}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \text{ ب}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \\ \text{تك} &= \text{تك}^{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}} \text{ ب}^{\frac{2}{3}, \frac{2}{3}} \end{aligned}$$

فان :

$$\text{ج} = (\text{تك} \circ \text{تك}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \text{ ب}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}) (\text{س})^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$$

$$= (\text{تك}^{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}} \text{ ب}^{\frac{2}{3}, \frac{2}{3}} \circ \text{تك}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \text{ ب}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}) (\text{س})^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$$

(ii)

$$= (\text{تك} \circ \text{تك}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \text{ ب}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}) (\text{ج})^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$$

لكن

(iii)

$$\text{ص} = (\text{تك} \circ \text{تك}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \text{ ب}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}) (\text{ج})^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$$

اذن

$$\text{ص} = (\text{تك} \circ \text{تك}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \text{ ب}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \circ \text{تك}^{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}} \text{ ب}^{\frac{2}{3}, \frac{2}{3}} \circ \text{تك}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \text{ ب}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}) (\text{س})^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$$

وباستخدام نتيجة (٢) نجد أن :

$$\text{تك} = \text{تك}^{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}} \text{ ب}^{\frac{2}{3}, \frac{2}{3}} \circ \text{تك}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \text{ ب}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \circ \text{تك}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \text{ ب}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$$

$$\text{تك} = \text{تك}^{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}} \text{ ب}^{\frac{2}{3}, \frac{2}{3}} \circ \text{تك}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \text{ ب}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \circ \text{تك}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \text{ ب}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$$

اذن :

$$\text{ص} = (\text{تك} \circ \text{تك}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \text{ ب}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \circ \text{تك}^{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}} \text{ ب}^{\frac{2}{3}, \frac{2}{3}} \circ \text{تك}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \text{ ب}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \circ \text{تك}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \text{ ب}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}) (\text{س})^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$$

$$= (\text{تك} \circ \text{تك}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \text{ ب}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \circ \text{تك}^{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}} \text{ ب}^{\frac{2}{3}, \frac{2}{3}} \circ \text{تك}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \text{ ب}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \circ \text{تك}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \text{ ب}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}) (\text{س})^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$$

$$= (\text{تك} \circ \text{تك}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \text{ ب}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \circ \text{تك}^{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}} \text{ ب}^{\frac{2}{3}, \frac{2}{3}} \circ \text{تك}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \text{ ب}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \circ \text{تك}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \text{ ب}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}) (\text{س})^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$$

$$= \begin{pmatrix} \text{تك} \\ \frac{1}{3} \text{ب} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \text{ت} \\ \frac{1}{2} \text{ب} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \text{تك} \\ \frac{1}{3} \text{ب} \end{pmatrix} (س)$$

في نظريه (٦) ، برهنا أن

$$\begin{pmatrix} \text{ت} \\ \frac{1}{2} \text{ب} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{تك} \\ \frac{1}{3} \text{ب} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \text{تك} \\ \frac{1}{3} \text{ب} \end{pmatrix}$$

ونستطيع أيضاً برهان أن

$$(**) \quad \begin{pmatrix} \text{ت} \\ \frac{1}{2} \text{ب} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{تك} \\ \frac{1}{3} \text{ب} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \text{تك} \\ \frac{1}{3} \text{ب} \end{pmatrix}$$

بالتالى فان :

$$ص = \begin{pmatrix} \text{تك} \\ \frac{1}{3} \text{ب} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \text{تك} \\ \frac{1}{3} \text{ب} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \text{تك} \\ \frac{1}{3} \text{ب} \end{pmatrix} (س)$$

$$= \begin{pmatrix} \text{تك} \\ \frac{1}{3} \text{ب} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \text{تك} \\ \frac{1}{3} \text{ب} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \text{تك} \\ \frac{1}{3} \text{ب} \end{pmatrix} (س)$$

$$= (I \circ I) (س) = I (س) = س$$

بالمثل ، اذا كانت  $\overline{هـ}$  تنصف  $\overline{أب}$  ، وبفرض أن  $\overline{ع د}$   $\overline{ج هـ}$  بحيث أن  $\overline{ع د} = \overline{ع هـ}$  فانه يمكننا اثبات أن  $\overline{ع د} = \overline{ع هـ}$  .

### ٦-٣ : خواص التشابه

مما سبق نستطيع أن نحمل خواص التشابه كالاتى :

١- التشابه تحويله هندسيه (مستويه)

٢- التشابه يحفظ مقياس الزوايا .

٣- التشابه يرسل الخطوط فوق الخطوط ويحافظ على التوازي والتعامد .

٤- التشابه يحفظ البنيه .

أما إذا أردنا أن نتكلم عن خواص التكبير ، فاننا نعلم أن كل تكبير هو تشابه (نظريه (٣) ) .  
ولذلك فالخواص السابقه للتشابه تتحقق بالنسبه للتكبير . كما يجب علينا ملاحظه أن :

التساويات القياسيه هى مجموعه جزئيه من التشابهات .



٦-٤ : أمثله متنوعه

١- أثبت أن مصفوفه التكبير  $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$  هي مصفوفه تشابه .

الحل :

نفرض أن مصفوفه التحويل  $\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$  التي تحفظ إتجاه جميع الخطوط :

$$\{(s, v) : v = ms\}$$

أى

$$(s, ms) \leftarrow (s', m's')$$

لجميع قيم م حيث م هو الميل المشترك .

$$\begin{pmatrix} s' \\ m's' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ ms \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad \text{اذن}$$

أو

$$\begin{pmatrix} s' \\ m's' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s + \beta ms \\ ms + \gamma ms \end{pmatrix}$$

وبالتالى :

$$s' = s + \beta ms$$

$$ms' = ms + \gamma ms$$

:

بالقسمة نجد أن :

$$\frac{1}{m} = \frac{\beta + \gamma}{\gamma}$$

أى

$$\beta m^2 + m(\gamma - \beta) - \gamma = 0$$

وحيث أن هذه المعادله تتحقق لجميع قيم ج ، فيجب أن تكون :

$$\beta = 0, \gamma = 0, \alpha = \gamma = \beta \quad \text{مثلاً}.$$

$$\text{لذلك فالمصفوفه} \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad \text{تأخذ الصوره :}$$

$$I\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \alpha = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

وقيمة محدد التحويل هو  $\alpha^2$  ، مما يثبت أن جميع الأشكال تزداد مساحتها بتحويل التكبير  $\alpha^2$  من المرات . وتزداد كذلك جميع الأطوال بمقدار  $\alpha$  من المرات وتظل جميع الزوايا كما هي بينما الاتجاه يظل ثابتاً .

وهذا يثبت أن  $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$  تحويل الشكل الى شكل تشابه  $\alpha$  لأن نسبة الأضلاع المتناظرة في الشكل وصورته واحده والزوايا متساوية أى أن المصفوفه تمثل تشابهاً .

٢- اذا كانت و  $(0,0)$  ،  $Q(5,2)$  نقط معطاه ، فأوجد

$$Q' = T_{\alpha, \beta}^{-1}(5,2)$$

الحل :

$$T_{\alpha, \beta}^{-1}(5,2) = (s, v) = (\alpha, s)$$

اذن

$$T_{\alpha, \beta}^{-1}(5,2) = (5, 2) = (15, 6)$$

٣- لأى نقطه  $Q(s, v)$  ، عين إحداثيات  $T_{\alpha, \beta}^{-1}(Q)$  اذا كانت و  $(-2, 3) = Q^*$

الحل :

باستخدام نظريه (٥) :

$$T_{\alpha, \beta}^{-1}(Q) = (Q) = (\alpha + s, \alpha + v) = (3, 2)$$

$$3 = \alpha + s, 2 = \alpha + v$$

هنا :

اذن

$$T_{\alpha, \beta}^{-1}(Q) = (s, v) = (3 - 1, 2 - 1) = (2, 1)$$

$$= (3 + s, 4 + v) = (6, 5)$$

٤- أوجد إحداثيات ن إذا كان  $T_{3,n}$  معرف بالقاعده :

$$T_{3,n} = (3s+2, 3v+4) \quad (3s, 3v) \text{ ق (س،ص)}$$

ثم أوجد  $T_{3,n}(1,2)$  .

الحل:

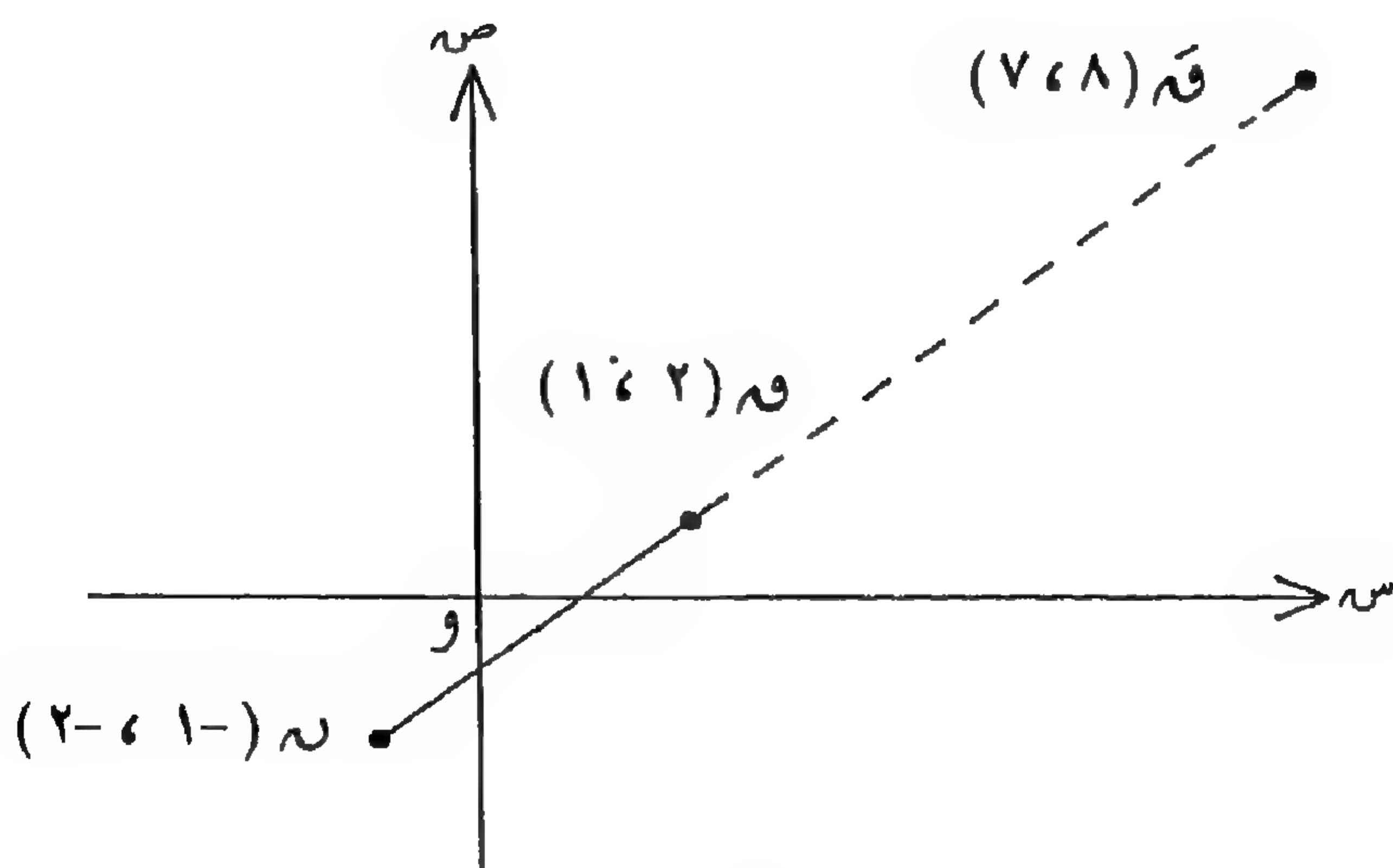
باستخدام ملاحظه (٢) ، نجد أن :

$$n = \left( \frac{2}{3-1}, \frac{4}{3-1} \right) = (1, 2)$$

وهي تمثل مركز التكبير  $T_{3,n}$

اذن

$$T_{3,n}(1,2) = (7, 8)$$



شكل (٦-١٤)

الشكل (٦-١٤) يوضح صحه النتيجة .

## تمارين عامة

١- لتكن أ ، ق ، ك نقط معطاه كما بالشكل . عين :

(أ) تك  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$  (ق) (ب) تك  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$  (ك)

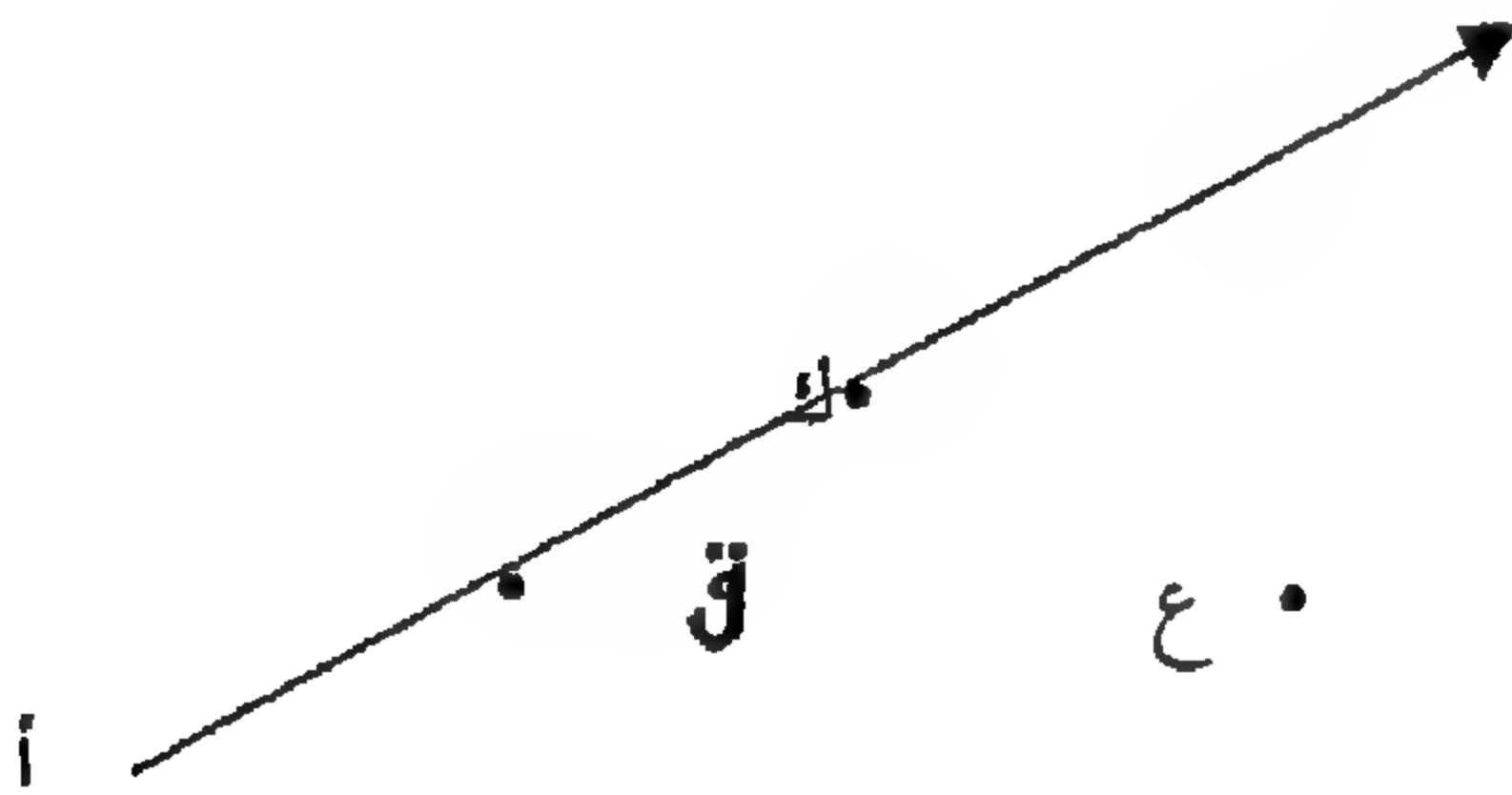
ق .

ك .

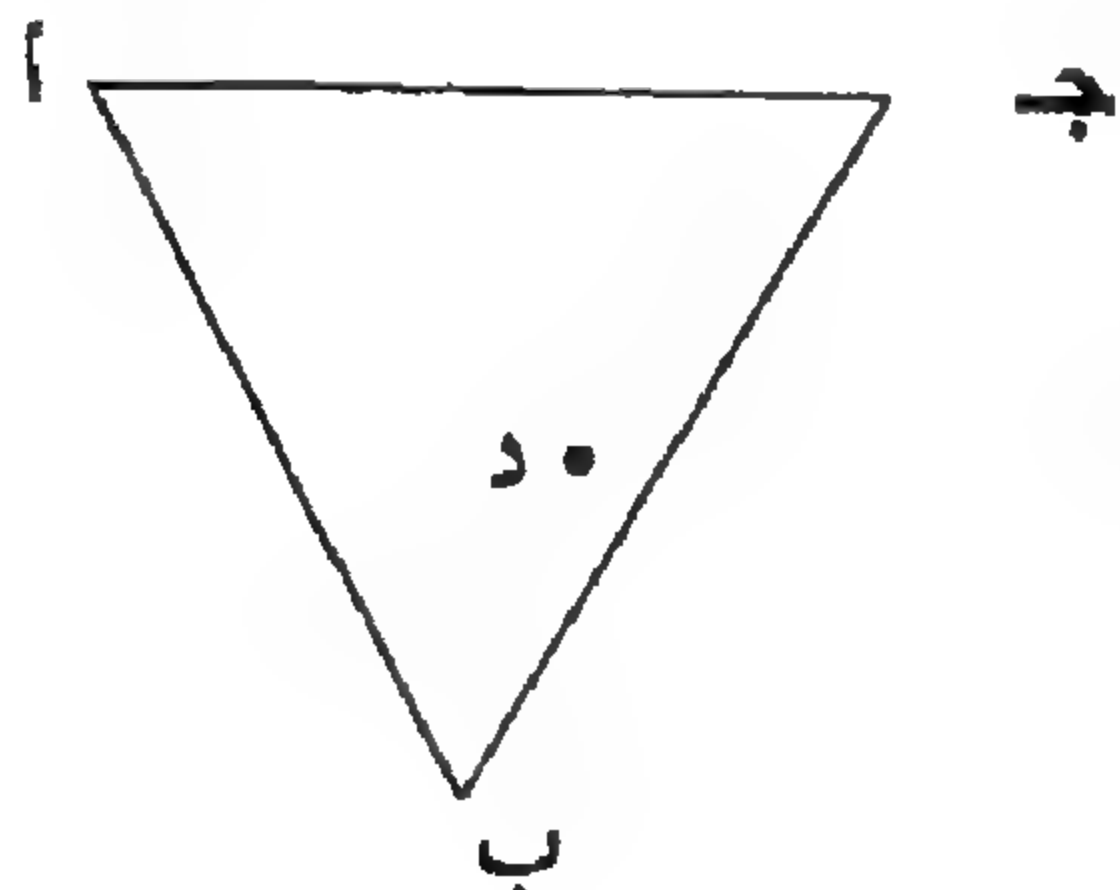
أ .

٢- لتكن أ ، ق ، ك ، ع نقط معطاه كما بالشكل . أوجد تك  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$  (ع) اذا كان :

(أ) تك  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$  (ك) - ق  
(ب) تك  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$  (ق) - ك



٣- لتكن د ، هـ نقط معطاه كما بالشكل . وليكن  $\Delta$  أ ب جـ مثلث كما بالشكل . عين :



(أ) تك  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$  ( $\Delta$  أ ب جـ)

(ب) تك  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$  ( $\Delta$  أ ب جـ) هـ .

٤- لتكن أ ، ق ، ك نقط غير واقعه على استقامه واحده . عين

(أ)  $س$  بحيث أن  $تک = (س) ق$   $\frac{٢}{٣}$   $\frac{١}{٣}$   $ق$  .

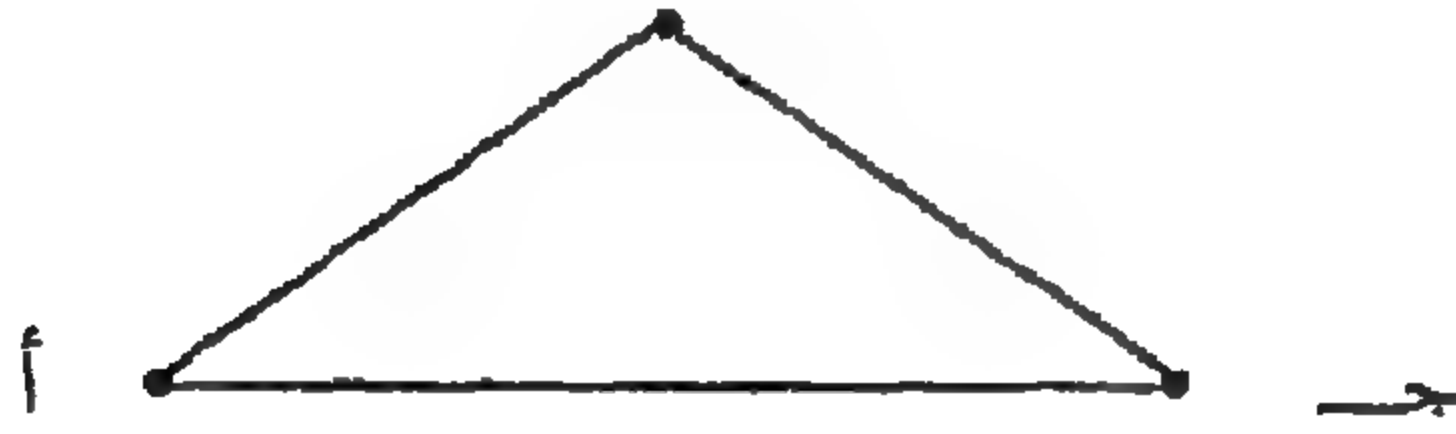
(ب)  $ق = ق$   $تک = ق$   $\frac{٢}{٣}$   $\frac{١}{٣}$   $ق$  .

(ج)  $ك = ك$   $تک = ك$   $\frac{٢}{٣}$   $\frac{١}{٣}$   $ك$  .

٥- ليكن  $\Delta$  أ ب جـ مثلث معطى . عين موضع النقطه ن اذا كان  $تک = (أ) جـ$  ،

مساحه  $\Delta$  أ ب جـ = ٤ (مساحه  $\Delta$  أ ب جـ) حيث

$\Delta$  أ ب جـ =  $تک$   $\frac{٢}{٣}$   $\frac{١}{٣}$   $(\Delta$  أ ب جـ)



٦- ليكن  $\Delta$  أ ب جـ مثلث ما ، ف نقطه معطاه .

(أ) عين  $\Delta$  أ ب جـ =  $تک$   $\frac{٢}{٣}$   $\frac{١}{٣}$   $(\Delta$  أ ب جـ) بحيث أن جـ د أ ب .

(ب) عين  $\Delta$  أ ب جـ =  $تک$   $\frac{٢}{٣}$   $\frac{١}{٣}$   $(\Delta$  أ ب جـ) بحيث أن

مساحه  $(\Delta$  أ ب جـ) = ٣ (مساحه  $\Delta$  أ ب جـ) (

ب

ف



٧- بين صحه أو خطأ التقارير التاليه:

(أ) إذا كان  $\Delta_{\alpha, j}$  تك  $(\Delta \text{ م ص ع}) = \Delta \text{ س ص ع}$  ، فان

$\Delta$  س ص ع ~  $\Delta$  س ص ع .

(ب) اذا كان  $تک_{\alpha, \beta} = (ق) = تک_{\beta, \alpha}$  لنقطه ما  $ق$  ، فان  $أ = ب$  ،  $\beta = \alpha$  .

(ج) اذا كان أب // جد ، فانه يوجد تكبير يرسل أب فوق جد .

(ع) إذا كانت  $Q$  نقطة تلاقي المستقيمتين المتوسطتين في  $\Delta ABC$  ،

ق\* - قك (ق) ، فان تك (ق\*) = ب

٨- إذا كانت و (٠،٠) ، ق (٥،٢) فأوجد احداثيات ق' = تك (٣،١) .

۹- أوجد احداثيات  $\alpha$  اذا كان  $\alpha$  يرسل ن (۲،۱) فوق ف (۶،۲)، جـ (۰،۳) فوق د (۱،۷) .

١٠- لأى نقطه **ق** (س،ص) ، عين احداثيات **تک** **ق** (ق) ، **تک** **ق** (ق) اذا كانت

و = (۲، ۱) ، ثم اوجد  $\left( \begin{smallmatrix} ٢ \\ ١ \end{smallmatrix} \right) \circ \left( \begin{smallmatrix} ١ \\ ٢ \end{smallmatrix} \right) = \left( \begin{smallmatrix} ١ \\ ٢ \end{smallmatrix} \right)$  .

۱۱-اذا كان

$$\Delta \text{ أ*ب*ج*} = (\text{ت*ك} \circ \text{ت*ك} \circ \text{س} \circ \text{س}) (\Delta \text{ أ*ب*ج*})$$

مساحة  $(\Delta \text{ أ ب ج}) = 6$  ، فعين مساحة  $\Delta \text{ أ ب ج}^*$  .

١٢- بين صحه أوخطأ التقارير التاليه :

(أ) مجموعه كل التكبيرات (ذات مركز تكبير مشترك) مع عمليه التحصيل ٥ تؤلف زمرة.

$$(ب) (تك_{\alpha,1} \circ تك_{\beta,1})^{-1} = تك_{\beta,1} \circ تك_{\alpha,1} \quad \vee \quad تك_{\alpha,1} \circ تك_{\beta,1} = تك_{\beta,1} \circ تك_{\alpha,1}$$

$$(ج) \text{ اذا كان } تك_{\alpha,1} = (ق) \text{ فكذلك } تك_{\beta,1} = (ق) \text{ فان } \alpha = \beta .$$

$$(د) \text{ اذا كان } تك_{\alpha,1} \circ تك_{\beta,1} \text{ ليس له نقطه ثابتة ، فانه لاى نقطه } ق \text{ يكون}$$



$$ق ق * // \alpha \beta \text{ حيث } ق * = (تك_{\alpha,1} \circ تك_{\beta,1}) (ق)$$

١٣- برهن النظريات التاليه :

أ - اذا كان  $\alpha, \beta$  ، رواسم تكبير فان  $\alpha, \beta$  رواسم تكبير .

ب - اذا كان  $تك_{\alpha,1} , تك_{\beta,1}$  تكبيرين لهما مركز تكبير مشترك ، فان

$$تك_{\alpha,1} \circ تك_{\beta,1} = تك_{\beta,1} \circ تك_{\alpha,1}$$

ج - لاى إنتقال ت ا ب ولاى تكبير  $تك_{\alpha,1}$  ، توجد نقطه ف بحيث أن

$$تك_{\alpha,1} \circ ت = ت \circ تك_{\alpha,1}$$

١٤ - اذا كانت  $\alpha = (1,3)$  ،  $ق(س,ص)$  أى نقطه :

$$أ - عين تك_{\alpha,1} (ق)$$

ب - اذا كان  $ل = \{(س,ص) : ٢س + ص = ٨\}$  ، فاكتب معادله  $تك_{\alpha,1} (ل)$  .

١٥- برهن أن :

$$A \neq B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in A \text{ و } \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in B \text{ .}$$

١٦- إذا كانت  $A(0,0)$  ،  $B(2,7)$  ،  $C(4,1)$  رؤوس مثلث  $\Delta ABC$  .  
 فأوجد نقطة تلاقي المستقيمت المتوسطة في  $\Delta ABC$  .

١٧- إذا كانت  $N$  نقطة تلاقي المستقيمت المتوسطة في  $\Delta ABC$  حيث  
 $A(2,0)$  ،  $B(0,6)$  ،  $C(8,10)$  ، فعين رؤوس  
 $(M, N, O) \in \Delta ABC$  .









# هندسة التحويلات

## لطلبة الجامعات والمعاهد العليا

### هذا الكتاب

يهدف في المقام الأول إلى تعريف الطالب لغة «هندسة التحويلات» ودراساتها كتركيب رياضي أو كنظام من أنظمة المسلمات. ونهدف في المقام الثاني أن يكون هذا الكتاب نقطة إنطلاق لكتب أكثر تعمقاً وأكثر تخصصاً لتغطية العديد من أفرع الرياضيات المستحدثة والتي يجب أن توجد في المكتبة العربية حتى نواكب ركب الحضارة والعلوم الحديثة، ونشرى تلك المكتبة بالمراجع العلمية. ونهدف أخيراً إلى أن يكون هذا الكتاب مرجعاً للسنوات الجامعية الأولى والمعاهد العليا.

وقد حاولنا بقدر الإمكان أن تكون أبواب الكتاب متناسقة حتى تكون القراءة مريحة ومثمرة. وحرصنا أيضاً على أن يكون الكتاب مجالاً لتوجيه نحو التفكير والمعرفة، والمعرفة باب العلم، والعلم وسيلة التفوق والسبق.

Bibliotheca Alexandrina



0650549

IHCI

INTERNATIONAL HOUSE FOR CULTURAL INVESTMENTS

CAIRO - EGYPT

ISBN: 977 - 282 - 077 - 3